21.06.2013

Übungsblatt 10 zu Knotentheorie Sommersemester 2012/13 (Weiss)

1. Wir haben das Jonespolynom $V(L)$ einer (nichtleeren) orientierten Verschlingung L eigentlich als Element in $\mathbb{Z}[t^{1/4}, t^{-1/4}]$ konstruiert, wobei $t^{-1/4}$ auch vorher A hiess. Wir haben definiert oder hergeleitet

(0) $V(L) = V(L')$, wenn L und L' orientiert isotop sind;
(i) $V(\bigcirc) = 1$;
(ii) die Knäuelrelation $t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) + (t^{-1/2} - t^{1/2})V(L_0) = 0$ (Einzelheiten bei Sanderson oder Lickorish, prop. 3.7. Ich glaube, Sanderson schreibt $\langle D|s\rangle$ fuer das, was bei Lickorish oder auch bei mir $A^{\sum_y s(y)}$ heisst. *State* ist das englische Wort für *Zustand*.)

Aufgabe für Sie:

a) Aus (0), (i) und (ii) direkt herleiten, dass das Jonespolynom einer Unverschlingung aus c Unknoten ($c > 0$) wie folgt aussieht:

$$(-t^{-1/2} - t^{1/2})^{c-1}.$$

b) Zeigen: das Jonespolynom ist durch die Eigenschaften (0), (i) und (ii) für alle orientierten Verschlingungen eindeutig bestimmt.
c) Zeigen: $V(L) \in \mathbb{Z}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$ für jede orientierte Verschlingung L.
d) Zeigen: $V(L) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ für jede orientierte Verschlingung L mit einer ungeraden Anzahl von (Zusammenhangs)komponenten.

Hinweise dazu: b) ist bei Lickorish angedeutet, bei Sanderson noch mehr, könnte aber unter Benutzung von a) noch etwas präzisiert werden. Übrigens wird nicht behauptet, dass man die Eigenschaften (0), (i), (ii) als Definition des Jonespolynoms nehmen kann, weil ja ohne weiteres nicht klar ist, ob sie konsistent sind. Bei d): was kann man über die Anzahl der Komponenten von L_+ , L_- und L_0 sagen?

2. a) Zeigen, dass $V(K)_{|t=1} = 1$ für jeden orientierten Knoten K.
b) Aus a) folgt auch

$$\sum_s (-2)^{|sD|-1} = \pm 1$$

wobei D ein Knotendiagramm ist und die Summe über die Zustände s von D erstreckt wird. Wie geht das?
c) Gedanken machen über $V(K)_{|t=-1}$. Siehe auch nächste Aufgabe.

3. Sei D ein *zusammenhängendes* (nichtleeres) Verschlingungsdiagramm. (Das heisst, der zugehörige Schatten ist zusammenhängend als Teilmenge

von $\mathbb{R}^2$; es wird nicht behauptet oder gefordert, dass die zugehörige Verschlingung in $\mathbb{R}^3$ nur eine Zusammenhangskomponente hat.) Gibt es immer einen Zustand s von D mit der Eigenschaft $|sD| = 1$?

Punkte: 2+2+1+5, 2+2+2, 4.