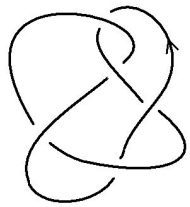
Aufg 1. a) Für Knoten 5_2 mit Diagramm E wie unten ausrechnen: $\mathrm{Col}(E)$ und Alexanderpolynom vom Knoten. [18]



b) Sei D irgendein Verschlingungsdiagramm mit r Komponenten (das heisst, die zugehörige Verschlingung in $\mathbb{R}^3$ hat r Zusammenhangskomponenten). Bestimmen Sie $\mathcal{F}_2(D)$. [4]

c) Es gibt eine einfache algebraische Beziehung zwischen $\mathrm{Col}(D)$ und $\mathcal{F}_n(D)$ für ein allgemeines Verschlingungsdiagramm D. Formulieren und Beweis skizzieren. [7]

d) Aus c) herleiten, dass die kommutative Gruppe $\mathrm{Col}(D)$ endlich ist, wenn D ein Knotendiagramm ist. [4]

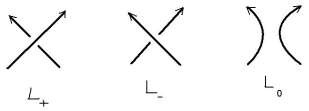
Aufgabe 2. a) Definieren: Verschlingung, Isotopie von Verschlingungen, Verschlingungsdiagramm, orientiertes Verschlingungsdiagramm. [6]

b) Reidemeisterzüge beschreiben und Satz von Reidemeister formulieren. (Der Satz hat eigentlich zwei Teile.) [4]

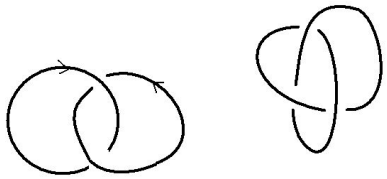
c) Der Alexandermodul $\mathcal{A}(D)$ für ein orientiertes Verschlingungsdiagramm soll definiert werden. Es ist ein Modul über dem Laurent-Polynomring $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$. Es soll gezeigt werden, dass $\mathcal{A}(D)$ isomorph ist zu $\mathcal{A}(E)$, wenn Diagramm E aus Diagramm D durch einen einzigen Reidemeisterzug hervorgeht. (Fallunterscheidung Rei1, Rei2, Rei3 muss gemacht werden; dabei haben aber Rei1, Rei2, Rei3 noch verschiedene Varianten, von denen nur je eine abgehandelt werden soll.) [23]

Aufgabe 3. a) Klammerpolynom für eine Verschlingung und Jonespolynom für eine orientierte Verschlingung definieren. (Rekursive Definition vom Klammerpolynom ist gestattet. Sie sollten diese auf jeden Fall erwähnen, um besser gerüstet zu sein für den nächsten Aufgabenteil.) [6]

b) Knäuelrelation für das Jones-Polynom formulieren und beweisen. [4]
Bezeichnungen wie im folgenden Bild benutzen:



c) Jones-Polynom $V(K)$ ausrechnen für den Knoten $K = 5_2$ (Bild wie in Aufgabe 1), wobei benutzt werden darf: $V(H) = -t^{-5/2} - t^{-1/2}$ und $V(K) = -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}$, wobei H eine Hopf-Verschlingung ist und K ein Kleeblattknoten. Genauer:



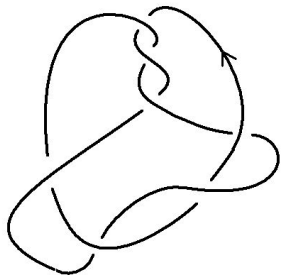
(*Die Original-Formulierung dieses Aufgabenteils enthielt eine nutzlose Hilfestellung mit $V(4_1)$ statt $V(H)$ und $V(K)$, die durch eine Beilage am Anfang der Klausur korrigiert wurde.*) [6]

d) Zeigen, dass in der Knäuelrelation gilt: Anzahl Komponenten von L_+ ist gleich Anzahl Komponenten von L_- und unterscheidet sich um ± 1 von der Anzahl der Komponenten von L_0. (*Hinweis*: Eine Fallunterscheidung mit zwei Fällen wird empfohlen.) [10]

e) Beweis andeuten, dass Jonespolynom $V(L)$ zu $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ gehört, wenn die orientierte Verschlingung L eine ungerade Anzahl von Komponenten hat; andernfalls gehört es zu $t^{1/2} \cdot \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$. Am besten d) benutzen, auch wenn Sie d) nicht zeigen konnten. [7]

Aufgabe 4. a) Methode von Seifert zur Konstruktion einer Seifertfläche für orientierten Knoten mit Knotendiagramm D soll beschrieben werden. [6]

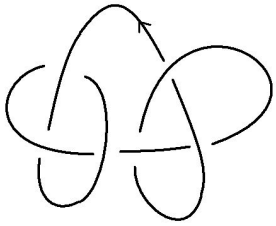
b) Durchführen im Fall des Knotens 7_3 (mit Diagramm D wie im Bild) und Geschlecht der so konstruierten Seifertfläche bestimmen. Was folgt daraus für das Geschlecht von 7_3 ? [8]



c) Definieren Sie die Summe von zwei orientierten Knoten und zeigen Sie, dass die Summe wohldefiniert ist bis auf Isotopie. [8]

d) Beweisen, dass die Knotensumme kommutativ ist bis auf Isotopie. [6]

e) Was ist das Geschlecht vom Grossmutterknoten (siehe Bild unten)? Benutzte Sätze sollten zitiert werden. [5]



Aufgabe 5. a) Sei X ein topologischer Raum mit Grundpunkt $*$. Geben Sie eine Definition von $\pi_1(X,*)$, alias *Fundamentalgruppe* von X. [6]

b) Erklären Sie kurz, was mit einer *Präsentation* (genauer, mit einer endlichen Präsentation) einer Gruppe gemeint ist. [3]

c) Sei $L \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte Verschlingung mit Verschlingungsdiagramm D in $\mathbb{R}^2$. Die Wirtinger-Präsentation ist eine Präsentation der Fundamentalgruppe von $\mathbb{R}^3 \smallsetminus L$, die das Diagramm D benutzt. Beschreiben. [6]

d) Führen Sie c) durch im Fall der Hopf-Verschlingung (mit zwei Komponenten), und auch im Fall einer Unverschlingung mit zwei Komponenten. Sind die Fundamentalgruppen der Komplemente isomorph? [10]

e) Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ ein orientierter Knoten und sei $G = \pi_1(\mathbb{R}^3 \smallsetminus K, *)$. Sei G^{ab} die *kommutative* Gruppe, die entsteht, wenn man in G die Relationen $ab = ba$ für beliebige $a, b \in G$ erzwingt; genauer, $G^{\mathrm{ab}} := G/[G,G]$. Aus der Wirtinger-Präsentation von $G = \pi_1(\mathbb{R}^3 \smallsetminus K, *)$ soll hergeleitet werden, dass G^{ab} isomorph zur Gruppe $\mathbb{Z}$ ist (ganze Zahlen mit Addition). [8]

Aufgabe 6. a) Definieren Sie den Begriff *Kategorie*. [4]

b) Gegeben seien Objekte X und Y in einer Kategorie. Was ist mit einem *Produkt* $X \prod Y$ in $\mathcal{C}$ gemeint? Was ist mit einem *Koprodukt* $X \coprod Y$ gemeint? [5]

c) Sei jetzt $\mathcal{C}$ die Kategorie der kommutativen Ringe. Genauer: die Objekte sind kommutative Ringe, mit 1, in denen $1 \neq 0$ gilt. Die Menge der Morphismen $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ist die Menge der Ringhomomorphismen von A nach B (die 1 auf 1 abbilden sollen). Gibt es in dieser Kategorie ein initiales Objekt? Gibt es ein terminales Objekt? [6]

d) Voraussetzungen wie unter c). Existiert ein Koprodukt $A \coprod B$ wenn $A = B = \mathbb{Z}[t]$? Existiert in diesem Fall ein Produkt $A \prod B$? Sind die beiden isomorph? [12]

e) Ist es richtig, dass für je zwei Objekte A, B in der Kategorie $\mathcal{C}$ (der kommutativen Ringe) ein Koprodukt $A \coprod B$ existiert? [6]