22.06.2017

Kategorien Sommersem. 2017 (Weiss)
Übungsblatt 9

Aufgabe 1. *Nicht genug Projektive in Garbenkategorien.*
Sei $\mathcal{A}$ die Kategorie der abelschen Gruppen, X ein topologischer Raum, und $\mathbf{Sh}(X;\mathcal{A})$ die Kategorie der Garben auf X mit Werten in abelschen Gruppen. Es soll gezeigt werden, dass es meistens in $\mathbf{Sh}(X;\mathcal{A})$ nicht genug Projektive gibt.[1]

Versuch einer Anleitung:[2] sei $y \in X$ fest. Sei $\mathcal{W}$ die Wolkenkratzergarbe an der Stelle y mit Halm $\mathcal{W}_y = \mathbb{Z}$. Also ist $\mathcal{W}(U) = \mathbb{Z}$ falls $y \in U$ und $\mathcal{W}(U) = 0$ sonst. Für jede offene Umgebung U von y sei $\mathcal{G}^U$ die Prägarbe auf X mit $\mathcal{G}^U(V) = \mathbb{Z}$ falls $V \subset U$ und $\mathcal{G}^U(V) = 0$ sonst (Einzelheiten ausgelassen). Es ist meistens keine Garbe, aber die Vergarbung $\Phi\mathcal{G}^U$ ist ein Objekt von $\mathbf{Sh}(X;\mathcal{A})$. Man konstruiere einen Epimorphismus

$$f^U\colon \Phi\mathcal{G}^U \to \mathcal{W}$$

für jedes U. Man zeige, unter schwachen Voraussetzungen an X: wenn

$$p\colon \mathcal{F} \to \mathcal{W}$$

irgendein Epimorphismus in $\mathbf{Sh}(X;\mathcal{A})$ ist, dann gibt es eine offene Umgebung U von X derart, dass eine Faktorisierung

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{G}^U \arrow[d, "f^U"] \\ \mathcal{F} \arrow[ur, dotted] \arrow[r, "p"'] & \mathcal{W} \end{tikzcd}$$

nicht existiert. Also ist $\mathcal{F}$ nicht projektiv. [10]

Aufgabe 2. *Additive Funktoren und Produkte.*
Zu zeigen: ein additiver Funktor $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ erhält endliche Produkte. (Auch präzisieren. Von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ müssen wir nur wissen, dass sie additive Kategorien sind.) [5]

Aufgabe 3. *Kriterium für epi/mono/iso bei Garben mit Werten in Modulkategorien.* Sei $\mathcal{C}$ die abelsche Kategorie der R-Linksmoduln (für R Ring mit Einheit), und $\mathbf{Sh}(X;\mathcal{C})$ die Kategorie der $\mathcal{C}$-wertigen Garben auf X wie üblich. Man zeige, dass ein Morphismus $g\colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}$

[1] Siehe dazu Definition(en) Ende Notizen Woche 9. Ausserdem könnte man benutzen: ein Morphismus $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ in $\mathbf{Sh}(X;\mathcal{A})$ ist genau dann ein Epimorphismus, wenn die induzierten Homomorphismen der Halme $\mathcal{E}_z \to \mathcal{F}_z$ sämtlich surjektiv sind. Dazu Aufgabe 3 auf diesem Blatt.

[2] Ohne Gewähr.

in $\mathbf{Sh}(\mathsf{X};\mathcal{C})$ genau dann epi/mono/iso ist, wenn die induzierten Abbildungen der Halme $\mathsf{g}_z\colon \mathcal{E}_z \to \mathcal{F}_z$ epi/mono/iso sind (in $\mathcal{C}$) für alle $z \in \mathsf{X}$. (Das geht wahrscheinlich nicht genau wie Ende Vorlesungsnotizen Woche 8, wo wir noch mengenwertige Garben hatten. Stattdessen sollte besser die Exaktheit des Funktors *Halm bei* z benutzt werden, Ende Vorlesungsnotizen Woche 9.) [5]