16.06.2017

Kategorien Sommersem. 2017 (Weiss)
Übungsblatt 8

Diese Woche sehr abstrakt ... es hat wohl etwas mit den vielen Feiertagen zu tun. Zum grossen Teil vertiefen die Aufgaben nur ein paar Sachen, die in der Vorlesung schon erwähnt wurden. Aufgabe 3 ist vielleicht eine Ausnahme.

Aufgabe 1. *Linksadjungierten einer vollen Inklusion erkennen.*
Sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie, $\mathcal{B}$ eine volle Unterkategorie und $\iota\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ der Inklusionsfunktor. Sei ausserdem $\mathsf{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Funktor und sei $\alpha\colon \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \to \iota \circ \mathsf{F}$ eine natürliche Transformation.
(a) Zeigen Sie, dass folgende Aussagen (i),(ii) äquivalent sind:

(i) F ist linksadjungiert zu ι und α ist die Einheit der Adjunktion.
(ii) Für jedes Objekt b in $\mathcal{B}$ ist $\alpha_b\colon b \to \mathsf{F}(b)$ ein Isomorphismus, und für jedes Objekt a in $\mathcal{A}$ ist $\mathsf{F}(\alpha_a)\colon \mathsf{F}(a) \to \mathsf{F}(\mathsf{F}(a))$ ein Isomorphismus.

(b) Geben Sie ein Beispiel von $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, F und α, bei dem der erste Teil von (a)(ii) erfüllt ist, (das heisst, $\alpha_b\colon b \to \mathsf{F}(b)$ ist immer ein Isomorphismus), aber nicht der zweite Teil.[1] [10]

Aufgabe 2. *Auswertung von Garben an offener Menge ist darstellbar.*
Sei X ein topologischer Raum und sei $V \subset X$ eine fest gewählte offene Teilmenge von X. Zeigen Sie, dass der (kovariante) Funktor

$$e_V\colon \mathbf{Sh}(X) \to \mathbf{Set}$$

gegeben durch $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(V)$ darstellbar ist. [7]

Aufgabe 3*. *Garbe der offenen Teilmengen.*
Sei X ein topologischer Raum. Sei $\mathcal{K}$ die Prägarbe auf X definiert durch $\mathcal{K}(V) := \{\, W \text{ offen in } X \mid W \subset V\}$. Für offene Teilmengen U, V von X mit $U \subset V$ soll die Einschränkungsabbildung $\mathcal{K}(V) \to \mathcal{K}(U)$ definiert sein durch $W \mapsto W \cap U$ für $W \in \mathcal{K}(V)$.

Zeigen Sie, dass $\mathcal{K}$ eine Garbe ist. (Dieses Beispiel spielt in der Logik oder Mengenlehre eine gewisse Rolle. Sie können ahnen, warum, wenn Sie fragen, welcher kontravariante Funktor von $\mathbf{Sh}(X)$ nach $\mathbf{Set}$ dargestellt wird durch $\mathcal{K}$. Also, was *bedeutet* ein Morphismus von einer beliebigen Garbe $\mathcal{F}$ auf X nach Garbe $\mathcal{K}$? Sie sollen natürlich nicht die Definition reproduzieren, sondern Sie sollen etwas sehen.) [3]

[1] Ich habe es selber noch nicht ernsthaft versucht, muss ich zugeben ... bin daher gespannt.