02.06.2017

Kategorien Sommersem. 2017 (Weiss)
Übungsblatt 7

Aufgabe 1. *Epi plus mono impliziert nicht iso*[1].
Geben Sie ein Beispiel von einem Morphismus $f\colon X \to Y$ in der Kategorie **Top**, der sowohl Monomorphismus als auch Epimorphismus ist, aber kein Isomorphismus (=Homöomorphismus). Versuchen Sie eine Charakterisierung von solchen Morphismen in **Top** (die sowohl Epimorphismen als auch Monomorphismen sind). [5]
Am 13.6. hinzugefügt: diese Aufgabe ist nicht korrekt formuliert. Die Kategorie **Top** *sollte ersetzt werden durch die volle Unterkategorie der Hausdorff-Räume.*

Aufgabe 2. *Bildgarben und Wolkenkratzergarben.*

(1) Sei $f\colon Y \to X$ eine stetige Abbildung von topologischen Räumen. Konstruieren Sie einen Funktor $f_*\colon \mathbf{prSh}(Y) \to \mathbf{prSh}(X)$ mit $(f_*\mathcal{F})(U) := \mathcal{F}(f^{-1}(U))$.
(2) Zeigen Sie, dass f_* Garben auf Garben abbildet und sich daher zu einem Funktor $f_* : \mathbf{Sh}(Y) \to \mathbf{Sh}(X)$ einschränkt (Bildgarbe).
(3) Wenn f zum Beispiel die Inklusion eines Punktes $p \in X$ ist, so erhalten wir damit einen Funktor $W_p\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Sh}(X)$ (wobei $\mathbf{Sh}(\{p\})$ mit **Set** identifiziert worden ist). Berechnen Sie die Halme der Garbe $W_p(A)$ für eine Menge A. (Tipp: X muss ja kein Hausdorffraum sein.)
(4) Der Funktor W_p in (3) hat einen Rechtsadjungierten. Wie sieht er aus? *Fehler in der Aufgabe ... es sollte wohl nach dem Linksadjungierten gesucht werden.*

(8P)

Aufgabe 3. *Epimorphismen von Garben.*
Geben Sie ein Beispiel für einen Morphismus $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ von Garben auf einem festen topologischen Raum X, der für jedes $z \in X$ eine Surjektion der Halme $\mathcal{F}_z \to \mathcal{G}_z$ induziert, aber nicht für jede offene Teilmenge U von X eine Surjektion $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$. [4]

Aufgabe 4. *Vergarbung und globale Schnitte.* Zu Beispiel 7.11. aus Vorlesungsnotizen[2]: Sei $\Phi\mathcal{G}$ die Vergarbung von $\mathcal{G}$. Wie sieht $\mathcal{G}(U)$ aus und wie sieht $\Phi\mathcal{G}(U)$ aus, wenn $U = X$? [3]

[1] Def. dazu in Vorlesungsnotizen Woche 8.
[2] Da gab es einen Druckfehler ... sollte jetzt korrigiert sein.