25.05.2017

Kategorien Sommersem. 2017 (Weiss)
Übungsblatt 6

Aufgabe 1. *Adjunktionen zwischen partiell geordneten Mengen.*
Es seien S, T partiell geordnete Mengen (aufgefasst als Kategorien). Zeigen Sie, dass eine Adjunktion zwischen S und T aus monotonen Abbildungen $f\colon S \to T$ und $g\colon T \to S$ mit der Eigenschaft

$$(f(s) \leq t) \Leftrightarrow (s \leq g(t))$$

besteht. Finden Sie als Beispiel dafür bei einem topologischen Raum X eine Adjunktion zwischen der Menge der offenen Teilmengen von X (bezüglich $\subset$) und der Menge der abgeschlossenen Teilmengen von X (bezüglich $\subset$). (5P)

Aufgabe 2. Wir wissen, das die Inklusion **abGrp** $\to$ **Grp** einen Linksadjungierten besitzt. Besitzt sie auch einen Rechtsadjungierten? (5P)

Aufgabe 3. Der Funktor *Einheitengruppe* von **Rng** nach **Grp** besitzt einen Linksadjungierten. (4P)

Zusatzaufgabe 4^***.** *Adjunktionen liefern Äquivalenzen.*
Sei $(F : \mathcal{C} \rightleftharpoons \mathcal{D} : G)$ eine Adjunktion mit Einheit η und Ko-Einheit ε. Sei $\mathrm{Fix}(\eta) \subset \mathcal{C}$ die volle Unterkategorie der x in $\mathcal{C}$, für die

$$\eta_x : x \to G(F(x))$$

ein Isomorphismus ist. Analog sei $\mathrm{Fix}(\varepsilon) \subset \mathcal{D}$ die volle Unterkategorie der y aus $\mathcal{D}$, für die

$$\varepsilon_y\colon F(G(y)) \to y$$

ein Isomorphismus ist. Zeigen Sie, dass F, G eine Äquivalenz von Kategorien $\mathrm{Fix}(\eta) \to \mathrm{Fix}(\varepsilon)$ induzieren. Illustrieren Sie das mit dem Beispiel aus Aufgabe 1. (6P)