18.05.2017/ 20.05.2017

Kategorien Sommersem. 2017 (Weiss)
Übungsblatt 5

Aufgabe 1. *Gruppenwirkungen und (Ko)limites.*
Sei X eine Menge ausgerüstet mit einer Wirkung der Gruppe G. Wir fassen in der üblichen Weise G als Kategorie $\underline{G}$ mit nur einem Objekt $*$ auf, so dass

$$\mathrm{mor}_{\underline{G}}(*,*) = G$$

usw. Ähnlich kann X mitsamt der Wirkung von G als ein Funktor $D_X \colon \underline{G} \to \mathbf{Set}$ aufgefasst werden, wobei $D_X(*) = X$ ist. (Präzisieren ...) Welche schon bekannten Begriffe werden dann durch colim D_X und lim D_X beschrieben? (4P)

Aufgabe 2. *Limites von kompakten Räumen.*
Sei $\mathcal{J}$ irgendeine kleine Kategorie und $D \colon \mathcal{J} \longrightarrow \mathbf{Top}$ ein Funktor. Zeigen: wenn $D(j)$ ein kompakter (Hausdorff-) Raum ist für jedes Objekt j in $\mathcal{J}$, dann ist lim D ein kompakter (Hausdorff-) Raum. (5P)

Aufgabe 3. *Eine Gruppe abelsch machen.*
Zeigen Sie, dass der Vergissfunktor $V : \mathbf{abGrp} \to \mathbf{Grp}$ von der Kategorie der abelschen Gruppen in die Kategorie der Gruppen einen linksadjungierten Funktor besitzt. (3P)

Aufgabe 4. *Ein Gedanke zum Satz von Schröder-Bernstein.*
Wir bauen folgende Kategorie $\mathcal{C}$. Die Objekte sind Paare (S, f) bestehend aus einer Menge und einer *injektiven* Abbildung $f \colon S \to S$. Ein Morphismus von (S, f) nach (T, g) ist eine Abbildung $h \colon S \to T$, die die Bedingung $hf = gh$ erfüllt.

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & S \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ T & \xrightarrow{g} & T \end{array}$$

(i) Zeigen, dass der Vergissfunktor $V \colon \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$, definiert auf Objekten durch $(S, f) \mapsto S$, einen Linksadjungierten $F \colon \mathbf{Set} \to \mathcal{C}$ besitzt.

(ii) Ausserdem zeigen, dass jedes Objekt (S, f) von $\mathcal{C}$ eine natürliche Zerlegung (im Sinn von Koprodukt)

$$(S, f) = (S_0, f_0) \sqcup (S_1, f_1)$$

in $\mathcal{C}$ besitzt, wobei

- (S_0, f_0) isomorph ist zu einem Objekt im Bild von F;
- (S_1, f_1) die Eigenschaft hat, dass $f_1 \colon S_1 \to S_1$ *bijektiv* ist. (8P)