10.05.2017

Kategorien Sommersem. 2017 (Weiss)
Übungsblatt 4

Aufgabe 1. *Beispiele von Kogruppenobjekten.*
In der Vorlesung (Notizen 3.13, 3.14, 3.22) wurde gezeigt, dass der Funktor $V \circ \mathrm{GL}_n$ von **CRng** nach **Set** darstellbar ist. (Ein darstellendes Objekt wurde explizit beschrieben.) Da der Funktor schon in der Form $V \circ \ldots$ daherkommt, ist für das darstellende Objekt $R = R_n$ eine Kogruppenstruktur bestimmt (Def. 3.19.).

Machen Sie diese Kogruppenstruktur explizit im Sinn von Notizen, Beispiel 4.1 (Vorsicht, falls Sie eine ältere Version haben). Das heisst: die Ringhomomorphismen δ, η, ρ sollen beschrieben werden. Der Fall $n = 1$ ist etwas einfacher als der allgemeine Fall. (8P)

Aufgabe 2. *Kolimes von einem darstellbaren Funktor.*
Sei $\mathcal{J}$ eine kleine Kategorie und sei $D\colon \mathcal{J} \to \mathbf{Set}$ ein Funktor (kovariant). Zeigen Sie: wenn D darstellbar ist, dann hat die Menge colim D genau ein Element. (4P)

Aufgabe 3. *Untergruppen von $\mathbb{Q}$.*
Sei A eine Untergruppe von $\mathbb{Q}$ (bez. der Addition). Zeigen Sie, dass es ganze Zahlen n_1 , n_2, n_3, ... gibt derart, dass A zum Kolimes des Diagramms von abelschen Gruppen

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n_3} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n_4} \cdots$$

isomorph ist. (4P)

Aufgabe 4. *Parametrisierte Mengen.*
Sei $\mathcal{C}$ eine kleine Kategorie und sei $\mathrm{fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set})$ die Kategorie der kontravarianten Funktoren von $\mathcal{C}$ nach **Set** (mit natürlichen Transformationen als Morphismen). Zeigen Sie, dass $\mathrm{fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set})$ alle direkten und inversen Limites hat. (4P)