04.05.2017

Kategorien Sommersem. 2017 (Weiss)
Übungsblatt 3

Aufgabe 1. *Beispiele für volle und treue Funktoren.*
Welche der folgenden Funktoren sind voll bzw. treu? (Die Wirkung auf Morphismen sollte klar sein.)

(a) $\mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$, $(X, \mathcal{T}) \mapsto X$, "vergiss Topologie"
(b) $\mathbf{abGrp} \to \mathbf{Grp}$, $(A, +) \mapsto (A, +)$, "vergiss Kommutativität"
(c) $\mathbf{Hausdf}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Poset}$, $(X, \mathcal{T}) \mapsto \mathcal{T}$ "vergiss Grundmenge"
(d) $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \to \mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}$, $V \mapsto V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ "Komplexifizierung".

Dabei ist **Hausdf** die Kategorie der Hausdorffräume. (6P)

Aufgabe 2. *Natürliche Transformationen suchen.*

(a) Sei $V\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ der Vergissfunktor. Man beschreibe alle natürlichen Transformationen von V nach V.
(b) Sei $E\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ der Funktor, der einer beliebigen Gruppe G die Teilmenge $E(G) \subset G$ bestehend aus allen Elementen der Ordnung ≤ 2 zuordnet, und einem Gruppenhomomorphismus $G \to H$ die Einschränkung $E(G) \to E(H)$. Man beschreibe alle natürlichen Transformationen von E nach E. (5P)

Aufgabe 3. *Natürliche Einbettung in den Bidualraum.*
Es sei K ein Körper. Für einen K-Vektorraum V gibt es eine K-lineare Abbildung $V \to V^{**}$, $v \mapsto (\phi \mapsto \phi(v))$. Interpretieren Sie diese linearen Abbildungen als eine natürliche Transformation

$$\tau\colon \mathrm{id}_{\mathbf{Vect}_K} \Rightarrow D^{\mathrm{op}} D$$

wobei $D\colon \mathbf{Vect}_K \to \mathbf{Vect}_K^{\mathrm{op}}$ der Dualraum-Funktor ist. Zeigen Sie ausserdem, dass τ zwar kein Isomorphismus ist, die Einschränkung auf endlich-dimensionale Vektorräume aber schon. (4P)

Aufgabe 4. *Nilpotente Elemente darstellen.*
Betrachten Sie den Funktor $N\colon \mathbf{CRng} \to \mathbf{Set}$, der einen kommutativen Ring R auf die Menge $N(R)$ der nilpotenten Elemente von R, und einen Ringhomomorphismus $R \to S$ auf die Einschränkung $N(R) \to N(S)$ schickt. Ist N ein darstellbarer Funktor? (5P)