Kategorien Sommersem. 2017 (Weiss) Übungsblatt 2

Aufgabe 1. *Ringe stetiger Funktionen.*
Konstruieren Sie einen Funktor $C(-;\mathbb{R}) : \mathbf{Top}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Rng}$, der einem topologischen Raum X den kommutativen Ring $C(X;\mathbb{R})$ der reellwertigen stetigen Funktionen auf X zuordnet, und einer stetigen Abbildung $f\colon X \to Y$ einen geeignet definierten Ringhomomorphismus $f^* : C(Y;\mathbb{R}) \to C(X;\mathbb{R})$. (4P)

Aufgabe 2. *Gruppenwirkungen mal anders.*
Es sei G eine Gruppe, aufgefasst als Kategorie mit einem Objekt. Es sei $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie. Beschreiben Sie Funktoren $G \to \mathcal{C}$. Gehen Sie insbesondere auf den Fall $\mathcal{C} = \mathbf{Vect}_K$ (Vektorräume über K) ein. (4P)

Aufgabe 3. *Koprodukte in der Kategorie der Ringe.*
In der Kategorie der Ringe **Rng** existieren Koprodukte. Das soll hier allerdings nur in einem Spezialfall behandelt werden. Für eine Gruppe G sei $\mathbb{Z}[G]$ der Gruppenring. Es ist ein Ring, dessen Elemente formale Linearkombinationen

$$\sum_{g\in G} a_g g$$

sind, wobei $a_g \in \mathbb{Z}$ und wobei nur endlich viele der Koeffizienten a_g von Null verschieden sind. Die Addition in $\mathbb{Z}[G]$ ist definiert (wie erwartet) durch

$$\Big(\sum_{g\in G} a_g g\Big) + \Big(\sum_{g\in G} b_g g\Big) = \sum_{g\in G} c_g g$$

wobei $c_g = a_g + b_g$. Die Multiplikation ist eine Faltung, definiert durch

$$\Big(\sum_{g\in G} a_g g\Big) \cdot \Big(\sum_{g\in G} b_g g\Big) = \sum_{g\in G} e_g g$$

wobei e_g die Summe aller Produkte $a_u b_v$ ist mit $uv = g$ in G. (Anders ausgedrückt: $\mathbb{Z}[G]$ enthält eine Kopie von G, weil wir $g \in G$ mit $1g \in \mathbb{Z}[G]$ identifizieren dürfen. Die Multiplikation in $\mathbb{Z}[G]$ stimmt in dieser Kopie von G mit der gegebenen Verknüpfung in G überein; alles Weitere wird durch das Distributivgesetz geregelt.)

Finden Sie eine hübsche Formel für das Koprodukt (in der Kategorie der Ringe) von $\mathbb{Z}[G]$ und $\mathbb{Z}[H]$, wobei G und H beliebige Gruppen sind. (8P)

Zusatzaufgabe 5*. *Endliche topologische Räume.*
Eine prägeordnete Menge $(X; \leq)$ besteht aus einer Menge X mit einer reflexiven und transitiven Relation $\leq$. Die Morphismen von $(X; \leq)$ nach $(Y; \leq)$ sind Abbildungen $f \colon X \to Y$ mit $x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$. Finden Sie einen Isomorphismus (d.h. zwei zueinander inverse Funktoren) zwischen der Kategorie der endlichen prägeordneten Mengen und der Kategorie der endlichen topologischen Räume. (5P)