

Kategorien Sommersem. 2017 (Weiss)

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. *Initiale Objekte sind eindeutig.*

Es seien \mathbf{a}, \mathbf{b} zwei initiale Objekte einer Kategorie \mathcal{C} . Zeigen Sie, dass es (genau) einen Isomorphismus $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}$ gibt. Beweisen Sie auch die entsprechende Aussage für terminale Objekte mit Hilfe der dualen Kategorie \mathcal{C}^{op} . (4P)

Aufgabe 2. *Produkte und Koprodukte von Mengen/Räumen.*

Verifizieren Sie die Konstruktion von Produkten und Koprodukten in **Set** und **Top** aus der Vorlesung im Detail, insbesondere dass es sich tatsächlich um Produkte bzw. Koprodukte handelt. (5P)

Aufgabe 3. *Koprodukte von abelschen Gruppen.*

Es sei **abGrp** die Kategorie der abelschen Gruppen. Für Objekte A, B in **abGrp** ist die direkte Summe $A \oplus B$ bekannt. Man hat zwei Homomorphismen $i_A: A \rightarrow A \oplus B$, $\mathbf{a} \mapsto (\mathbf{a}, 0)$ und analog i_B von B nach $A \oplus B$. Zeigen Sie, dass $(A \oplus B, i_A, i_B)$ ein Koprodukt von A und B ist. Wieso funktioniert dieselbe Konstruktion nicht auch in der Kategorie der Gruppen **Grp**? (5P)

Aufgabe 4. *Distributivgesetz in Kategorien.*

Es sei \mathcal{C} eine Kategorie, in der je zwei Objekte \mathbf{a}, \mathbf{b} ein Produkt $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ sowie ein Koprodukt $\mathbf{a} \sqcup \mathbf{b}$ besitzen. Konstruieren Sie für je drei Objekte $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ einen Morphismus

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \sqcup (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \longrightarrow \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \sqcup \mathbf{c}).$$

Ist dieser Morphismus ein Isomorphismus in a) **Set**, b) **abGrp**? (6P)

Zusatzaufgabe 5*. *Rekursion.*

Betrachten Sie die folgende Kategorie: Objekte sind Tupel (X, x_0, S) bestehend aus einer Menge X , einem Element $x_0 \in X$ und einer Abbildung $S: X \rightarrow X$. Ein Morphismus $(X, x_0, S) \rightarrow (Y, y_0, T)$ ist eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ mit $f(x_0) = y_0$ und $f \circ S = T \circ f$. Finden Sie ein initiales Objekt in dieser Kategorie! (5P)