6.7.2017

Kategorien Sommersem. 2017 (Weiss)
Übungsblatt 11

Aufgabe 1. Gegeben kommutatives Diagramm in abelscher Kategorie

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] & C \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' & \end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen. (Habe ich bei Wikipedia kopiert ... Stichwort *Schlangenlemma*.) Es soll gezeigt werden, dass die resultierende Folge $\ker_s(a) \to \ker_s(b) \to \ker_s(c)$ exakt ist. (Dabei bezeichnet $\ker_s$ Kerne im traditionellen Sinn; Dekoration s für *source*, weil zum Beispiel $\ker_s(a)$ die Quelle vom Monomorphismus $\ker(a)$ im modernen Sinnn ist.) *Das ist ein kleiner Teil der Aussage vom Schlangenlemma. Der Beweis bei Wikipedia zitiert einen Satz von Mitchell; sie sollen es aber ohne Satz von Mitchell schaffen!* [3]

Aufgabe 2. Sei $R = \mathbb{Z}[t_1, t_2, \ldots, t_n]$ der Polynomring in n Variablen. Sei $\mathbb{Z}'$ der R-Modul bestehend aus abelscher Gruppe $\mathbb{Z}$ und R-Modulstruktur gegeben durch $t_i z = 0$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ und alle $z \in \mathbb{Z}$. Sei N irgendein R-Modul.

(i) Zeigen, dass $\hom_R(\mathbb{Z}', N) \cong \{x \in N \mid t_i x = 0 \text{ für } i = 1, 2, \ldots, n\}$.

(ii) Projektive Auflösung von $\mathbb{Z}'$ als R-Modul konstruieren.

Daraus sollte sich eine Formel für $\mathrm{Ext}_j^R(\mathbb{Z}', N)$ ergeben. [5]

Aufgabe 3. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genügend vielen Projektiven. Wir bauen eine neue Kategorie $\mathcal{B}$, eine additive Kategorie, wie folgt. Die Objekte von $\mathcal{B}$ sind die Objekte von $\mathcal{A}$. Ein Morphismus in $\mathcal{B}$ von c nach d ist eine Äquivalenzklasse von Morphismen $c \to d$ in $\mathcal{A}$. Dabei sollen Morphismen $f, g \colon c \to d$ in $\mathcal{A}$ als äquivalent gelten, wenn die Differenz $f - g$ eine Faktorisierung

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[dr] & \\ c \arrow[ur] \arrow[rr, "f-g"'] & & d \end{tikzcd}$$

besitzt, in der b *projektiv* ist.

(i) Füllen Sie die Einzelheiten aus und zeigen Sie damit, dass $\mathcal{B}$ tatsächlich eine additive Kategorie ist und dass man einen (additiven) Funktor $Q \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ erhält, indem man Objekte a auf dieselben Objekte a abbildet und Morphismen $f\colon c \to d$ in $\mathcal{A}$ auf ihre Äquivalenzklasse $[f]$.

(ii) Für ein Objekt c von $\mathcal{A}$ sei $\Omega(c)$ der Kern von beliebigem Epimorphismus $p\colon b \to c$ in $\mathcal{A}$ mit projektivem b. In $\mathcal{A}$ ist $\Omega(c)$ nicht wohldefiniert. Zeigen Sie, dass $\Omega(c)$ in $\mathcal{B}$ wohldefiniert ist (bis auf eindeutigen Isomorphismus in $\mathcal{B}$, soll das heissen). Auf diese Weise wird Ω ein additiver Funktor $\mathcal{B} \to \mathcal{B}$. Einzelheiten ausfüllen.

(iii) Sei F ein rechts-exakter Funktor von $\mathcal{A}$ in eine andere abelsche Kategorie $\mathcal{C}$. Zeigen Sie, dass sich der Linksabgeleitete L_1F als Zusammensetzung VQ schreiben lässt (mit $V\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$).

(iv) Zeigen Sie ausserdem, dass $L_{1+j}F \cong V\Omega^j Q$ für alle $j \geq 0$.

[12]