28.06.2017

Kategorien Sommersem. 2017 (Weiss)
Übungsblatt 10

Es kommt vielleicht noch mehr dazu ...

Aufgabe 1. Zu jeder Kardinalzahl α existiert eine wohlgeordnete Menge S derart, dass jede Teilmenge T von S, deren Kardinalität $< \alpha$ ist, eine obere Schranke in S besitzt. (*Ausserdem soll S kein maximales Element besitzen — später hinzugefügt.*) (Diese Behauptung kam in den Vorlesungsnotizen Woche 10 vor.) [6]

Aufgabe 2. Sei R der Ring der $n \times n$-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{Q}$. Sei $M = \mathbb{Q}^n$, aufgefasst als R-Linksmodul in der üblichen Weise (indem wir Elemente von $\mathbb{Q}^n$ als Spaltenvektoren interpretieren, und solche bei Bedarf von links mit Matrizen multiplizieren). Zeigen, dass M ein projektiver Modul über R ist.

Geht das auch mit $\mathbb{Z}$ anstelle von $\mathbb{Q}$? [6]

Aufgabe 3. Sei G eine freie Gruppe mit n Erzeugern. Sei $\mathbb{Z}[G]$ der Gruppenring und $\alpha\colon \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}$ der Augmentations(ring)homomorphismus, also

$$\alpha(\sum_g c_g g) = \sum_g c_g\,.$$

Dann ist α automatisch auch ein Homomorphismus von $\mathbb{Z}[G]$-Linksmoduln. Zeigen: der Kern von α (traditionelle Bedeutung) ist ein freier Linksmodul über $\mathbb{Z}[G]$.

Hinweis: Für Topologen sollte das leicht(er) sein. [8]