4.08.2017

KATEGORIEN

(Sommersemester 2107, Weiss)

1. Begriff Kategorie; Produkte und Koprodukte

Definition 1.1. Eine *kleine Kategorie* $\mathcal{C}$ besteht aus einer Menge $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und, zu jeder Wahl von $a, b \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, einer Menge $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, b)$. Ausserdem sollen gegeben sein

- für jedes $a \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ein ausgezeichnetes Element $\mathrm{id}_a \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, a)$;
- für alle $a, b, c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ eine Abbildung

$$\circ : \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(b, c) \times \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, b) \longrightarrow \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, c).$$

Wir schreiben dafür meistens $g \circ f$ statt $\circ(g, f)$ und denken *Zusammensetzung.*

Für die Zusammensetzungsoperation $\circ$ soll gelten: $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$, also Assoziativiatät, wobei etwa $g \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(c, d)$ und $f \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(b, c)$ und $h \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, b)$; ausserdem $\mathrm{id}_b \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_a$ für jedes $f \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, b)$, bei beliebigen $a, b \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.
Vokabular: Ein Element von $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ heisst *Objekt* von $\mathcal{C}$. Ein Element f von $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, b)$ heisst *Morphismus* von Objekt a nach Objekt b. So ein Morphismus wird oft durch einen Pfeil beschrieben; also $f : a \to b$ ist eine andere Art, $f \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, b)$ zu sagen.
Bei einer Kategorie $\mathcal{C}$ schlechthin (ohne das Wort *klein*) bestehen wir nicht darauf, dass $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ eine Menge ist. Man kann zur Entschuldigung sagen, dass $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ eine *Klasse* ist; damit will man sich Immunität verschaffen gegenüber den Einschränkungen, die mit dem Wort *Menge* verbunden sind. (Mehr Einzelheiten dazu bei MacLane, Abschnitt *Foundations.*) Alles andere ist wie oben; speziell soll $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, b)$ immer noch eine Menge sein für beliebige a und b aus $\mathcal{C}$. (Statt ein neues und schwer definierbares Wort wie *Klasse* zu benutzen, kann man auch einfach sagen: eine Kategorie $\mathcal{C}$ hat Objekte $a, b, c, ...$, und für je zwei Objekte a, b aus $\mathcal{C}$ ist eine Menge $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, b)$ gegeben, usw.)

Die meisten Beispiele, die einem zuerst einfallen, sind *grosse* Kategorien.

Beispiel 1.2. Das Ur-Beispiel ist die *Kategorie der Mengen*, nennen wir sie **Set**. Die Objekte sind in diesem Fall die Mengen. Die Menge $\mathrm{mor}_{\mathbf{Set}}(X, Y)$ ist einfach die Menge aller Abbildungen von Menge X nach Menge Y. Die Zusammensetzung $\circ$ ist einfach die Zusammensetzung von Abbildungen. Der Identitätsmorphismus $\mathrm{id}_X \in \mathrm{mor}_{\mathbf{Set}}(X, X)$ ist einfach die Identitätsabbildung $\mathrm{id}_X : X \to X$.

Beispiel 1.3. Ein weiteres naheliegendes Beispiel ist die Kategorie der Gruppen, nennen wir sie **Grp**. Die Objekte sind in diesem Fall die Gruppen. Die Menge $\mathrm{mor}_{\mathbf{Grp}}(G, H)$ ist die Menge aller Homomorphismen von Gruppe G nach Gruppe H. Die Zusammensetzung $\circ$ ist die Zusammensetzung von Homomorphismen. Für eine Gruppe K ist $\mathrm{id}_K \in \mathrm{mor}_{\mathbf{Grp}}(K, K)$ der Identitätshomomorphismus $\mathrm{id}_K : K \to K$.

Beispiel 1.4. Ein drittes Standardbeispiel ist die Kategorie der topologischen Räume[1], nennen wir sie **Top**. Die Objekte sind in diesem Fall die topologischen Räume $(X, \mathtt{U})$. Die Menge $\mathrm{mor}_{\mathcal{T}}((X,\mathtt{U}),(Y,\mathtt{V}))$ ist die Menge aller stetigen Abbildungen von $(X,\mathtt{U})$ nach $(Y,\mathtt{V})$. Die Zusammensetzung $\circ$ ist die Zusammensetzung von stetigen Abbildungen. Für einen topologischen Raum $(X,\mathtt{U})$ ist $\mathrm{id}_{(X,\mathtt{U})} \in \mathrm{mor}_{\mathcal{S}}((X,\mathtt{U}),(X,\mathtt{U}))$ die Identitätsabbildung.

Die Kategorien in diesen Standardbeispielen beschreiben, jede für sich, die "soziologischen" Aspekte einer grösseren mathematischen Theorie. Ausserdem sind die Objekte in diesen Beispielen Mengen mit zusätzlicher Struktur, und die Morphismen sind strukturerhaltende Abbildungen zwischen diesen Mengen. Es gibt aber auch Beispiele von Kategorien, die nicht von dieser Art sind.

Beispiel 1.5. Jede Gruppe G bestimmt eine kleine Kategorie $\mathcal{C}$ mit nur einem Objekt $*$ und $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(*,*) = G$. Wir benutzen die Multiplikation in G, um die Zusammensetzung von Morphismen aus $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(*,*)$ zu definieren, nämlich $f \circ g = fg$ falls $f, g \in G = \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(*,*)$. Das neutrale Element von G dient als Identitätsmorphismus von $* \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

Beispiel 1.6. Jede geordnete Menge $(X, \leq)$ bestimmt eine kleine Kategorie $\mathcal{D}$ mit Objektmenge $\mathrm{Ob}(\mathcal{D}) = X$. Wir bestimmen, dass für $x, y \in X$ die Menge $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(x,y)$ genau ein Element haben soll (Name ist mir egal), wenn $x \leq y$, und sonst leer sein soll. Man überlegt sich, dass damit die Zusammensetzung schon bestimmt ist, denn für beliebige $x, y, z \in X$ gibt es genau eine Abbildung

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(y,z) \times \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(x,y) \longrightarrow \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(x,z)$$

und diese nehmen wir. (Der Fall $x \leq y$ und $y \leq z$ ist interessant; dann sind sowohl $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(y,z) \times \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(x,y)$ als auch $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(x,z)$ einelementige Mengen. In allen anderen Fällen ist $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(y,z) \times \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(x,y) = \emptyset$.)

Ein weiteres Beispiel einer Kategorie ist **Toph**, die *Homotopiekategorie der topologischen Räume*, die in der algebraischen Topologie wichtig ist. Dazu brauchen wir eine Definition.

Definition 1.7. Gegeben topologische Räume $X = (X,\mathtt{U})$ und $Y = (Y,\mathtt{V})$. Zwei stetige Abbildungen f und g von X nach Y heissen *homotop* (zueinander), wenn es eine stetige Abbildung $F \colon X \times [0,1] \longrightarrow Y$ gibt mit den Eigenschaften $F(x,0) = f(x)$ und $F(x,1) = g(x)$ für alle $x \in X$. (Dieses f heisst dann auch *Homotopie von f nach g*.)

Proposition 1.8. *Die Homotopierelation ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetigen Abbildungen von X nach Y.*

Wir schreiben $[X,Y]$ für die Menge der Äquivalenzklassen. Wir schreiben manchmal $[f] \in [X,Y]$ für die Äquivalenzklasse (auch Homotopieklasse genannt) einer stetigen Abbildung $f \colon X \to Y$.

[1]Ein topologischer Raum besteht aus einer Menge X und einer Teilmenge $\mathtt{U}$ der Potenzmenge $\mathtt{P}(X)$, die gewisse Bedingungen erfüllt. Eine stetige Abbildung von einem topologischen Raum $(X,\mathtt{U})$ in einen anderen topologischen Raum $(Y,\mathtt{V})$ ist (Def.) eine Abbildung f von Menge X nach Menge Y mit der Eigenschaft, dass für jedes $Z \in \mathtt{V}$ das Urbild $f^{-1}(Z) = \{x \in X \mid f(x) \in Z\}$ ein Element von $\mathtt{U}$ ist.

Ausserdem: für topologische Räume X, Y, Z ist eine Zusammensetzungsoperation

$$\circ : [Y, Z] \times [X, Y] \longrightarrow [X, Z]$$

*wohl*definiert durch $[g] \circ [f] := [g \circ f]$.

Beweis-Skizze. Wir denken uns stetige Abbildungen $f, g, h : X \to Y$ und Homotopien $F \colon X \times [0,1] \longrightarrow Y$ von f nach g sowie $G \colon X \times [0,1] \longrightarrow Y$ von g nach h. (Das bedeutet $F(x,0) = f(x)$ und $F(x,1) = g(x)$ und $G(x,0) = g(x)$ und $G(x,1) = h(x)$ für alle $x \in X$; ausserdem sind F und G auch stetig.) Wir definieren

$$W \colon X \times [0,1] \to Y$$

durch $W(x,t) = F(x,2t)$ falls $t \leq 1/2$ und $W(x,t) = G(x, 2t-1)$ falls $t \geq 1/2$. Dann ist W stetig und wohldefiniert (wegen $W(x,1/2) = F(x,1) = g(x) = G(x,0) = W(x,1/2)$ hauptsächlich) und stellt eine Homotopie von f nach h dar. Damit ist die Transitivität der Homotopierelation gezeigt. Symmetrie: gegeben stetige $f, g : X \to Y$ und eine Homotopie

$$F \colon X \times [0,1] \longrightarrow Y$$

von f nach g. Dann ist $G \colon X \times [0,1] \longrightarrow Y$ definiert durch $G(x,t) = F(x, 1-t)$ eine Homotopie von g nach f. Reflexivität: Für stetiges f von X nach Y ist $F \colon X \to Y$ gegeben durch $F(x,t) = f(x)$ eine Homotopie von f nach f.
Zusammensetzung: gegeben zwei stetige Abbildungen $f_0, f_1 \colon K \to X$, die zueinander homotop sind und zwei stetige Abbildungen $g_0, g_1 \colon X \to Y$, die zueinander homotop sind. Wir wollen zeigen, dass $g_0 \circ f_0$ homotop zu $g_1 \circ f_1$ ist. Man zeigt erst $g_0 \circ f_0$ homotop zu $g_0 \circ f_1$ und dann $g_0 \circ f_1$ homotop zu $g_1 \circ f_1$. Dann kann man die Transitivität der Homotopierelation ausnutzen, die ja schon gezeigt worden ist. □

Definition 1.9. Die Kategorie **Toph** ist dann so definiert: Objekte sind wie in **Top**. Ein Morphismus von X nach Y ist eine Homotopieklasse von stetigen Abbildungen von X nach Y. Die Zusammensetzung von Morphismen ist wie oben angedeutet, $[g] \circ [f] := [g \circ f]$, wobei g und f stetige Abbildungen sind, die die gewünschten Homotopieklassen repräsentieren.

Beispiel 1.10. ... übernommen von Adamek-Herrlich-Strecker. Kategorien sind wichtig in der theoretischen Informatik. (Ich behaupte allerdings nicht, besonders gut zu verstehen, warum.) Ein einfaches mathematisches Modell einer "Maschine" (nach Moore) ist wie folgt. Die Maschine ist beschrieben durch eine endliche Menge S von Zuständen, eine endliche Menge I von möglichen Eingaben, eine endliche Menge O von möglichen Ausgaben, eine Abbildung $t \colon S \times I \to S$ (Übergangsfunktion), die beschreibt, wie ein Zustand und eine Eingabe einen neuen Zustand bestimmen, und eine Abbildung $\omega \colon S \to O$. Und dann soll es noch einen Anfangszustand s_0 geben. Also: eine Maschine ist ein Sextupel $(S, I, O, t \colon S \times I \to S, \omega \colon S \to O, s_0 \in S)$, wobei S, I, O endliche Mengen sind usw. Wenn wir jetzt so eine Maschine als ein Programm ansehen (viel mehr Software als Hardware), dann kann es interessant sein, zu fragen, ob eine Maschine eine Andere simulieren kann. Das führt zu einem Begriff von Morphismus. Wenn also $(S, I, O, t, \omega, s_0)$ und $(S', I', O', t', \omega', s'_0)$ solche Maschinen sind, dann besteht ein Morphismus von der ersten nach der zweiten aus drei Abbildungen:

$$f \colon S \to S', \quad g \colon I \to I', \quad h \colon O \to O'$$

die gewisse Verträglichkeitsbedingungen erfüllen müssen: zum Beispiel

$$f(t(x,j)) = t'(f(x), g(j))$$

für alle $x \in S$ und $j \in I$. Genaueres bei Adamek-Herrlich-Strecker, Chapter I, Section 3, wo diese Kategorie der Maschinen oder Automaten mit **Aut** bezeichnet wird.

Bemerkung 1.11. *Darstellung von Morphismen als Pfeile.* Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Statt $f \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a,b)$ wird, wie schon angedeutet, oft so etwas wie $f\colon c \to d$ geschrieben. Also $f\colon c \to d$ bedeutet, dass f ein Morphismus in $\mathcal{C}$ von Objekt c nach Objekt d ist. Dabei muss man sich aber vor Augen halten, dass die Morphismen in $\mathcal{C}$ nicht immer als Abbildungen (zwischen Mengen) verstanden werden können! Sei zum Beipiel $\mathcal{D}$ die Kategorie, die wie oben aus einer partiell geordneten Menge $(X, \leq)$ gebaut worden ist. In dieser Kategorie $\mathcal{D}$ ist die richtige Deutung von $f\colon c \to d$ die, dass $c, d \in X$ und $c \leq d$ ist. (Es gibt dann nur ein mögliches f.)
Mit der Pfeilsprache kommt auch unweigerlich der Begriff *kommutatives Diagramm*, den ich lieber nicht allzusehr formalisieren will, aber trotzdem benutzen werde. Wenn zum Beipiel von einem kommutativen Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] & v \arrow[d, "k"'] \arrow[ddr, "\ell"] & \\
w \arrow[r, "g"] \arrow[drr, "m"] & x & y \\
& & z
\end{tikzcd}$$

in einer Kategorie $\mathcal{C}$ die Rede ist, dann heisst das: u, v, w, x, y, z sind Objekte von $\mathcal{C}$, die Pfeile f, g, h, k, ℓ, m sind Morphismen (zum Beispiel ist f ein Morphismus von u nach v), und Zusammensetzungen von Pfeilen, die dieselbe Quelle (Source) und dasselbe Ziel (Target) haben, *sind gleich.* Hier bedeutet es, dass

$$k \circ f = g \circ h \in \mathrm{mor}(u,x), \qquad \ell \circ f = m \circ h \in \mathrm{mor}(u,y).$$

Übrigens ist es erlaubt, krumme Pfeile zu benutzen oder solche Pfeile, die andere überkreuzen, aber es ist gefährlich, wenn man in einem kommutativen Diagramm Zusammensetzungen von Pfeilen hat, die von einem Objekt zum selben Objekt führen. Das muss dann eigentlich so verstanden werden, dass diese Zusammensetzung ein Identitätsmorphismus ist, ist aber leider oft nicht so gemeint.

Definition 1.12. Eine wichtige Vokabel in der Kategorientheorie ist *Isomorphismus.* Sei also $\mathcal{C}$ eine Kategorie und a, b Objekte in $\mathcal{C}$ und $f \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a,b)$. Wir sagen, dass f ein *Isomorphismus* ist, wenn $g \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(b,a)$ existiert mit den Eigenschaften

$$f \circ g = \mathrm{id}_b \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(b,b), \qquad g \circ f = \mathrm{id}_a \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a,a) \;.$$

(So ein g ist dann auch eindeutig — kleine Übungsaufgabe.) Wenn es einen Isomorphismus von a nach b gibt, dann sagen wir auch, dass a und b *isomorph* sind.

In den "klassischen" Kategorien haben die Isomorphismen manchmal klassische Namen. Zum Beispiel heissen die Isomorphismen in der Kategorie der Mengen *Bijektionen.* Die

Isomorphismen in der Kategorie der topologischen Räume nennt man *Homöomorphismen.* In der Kategorie der Gruppen dagegen heissen die Isomorphismen einfach *Isomorphismen.*

Definition 1.13. Ein Objekt z einer Kategorie $\mathcal{C}$ heisst *terminal*, wenn für jedes Objekt a in $\mathcal{C}$ die Menge $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a,z)$ genau ein Element hat. Ein Objekt z einer Kategorie $\mathcal{C}$ heisst *initial*, wenn für jedes Objekt a in $\mathcal{C}$ die Menge $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(z,a)$ genau ein Element hat. Beispiele dazu: In der Kategorie der Mengen ist jede einelementige Menge terminal. Die leere Menge ist ein initiales Objekt. In der Kategorie der Gruppen ist die triviale Gruppe (mit nur einem Element) sowohl ein terminales als auch ein initiales Objekt. In der Kategorie der topologischen Räume sind die terminalen und initialen Objekte so wie in der Kategorie der Mengen: jeder Einpunkt-Raum ist terminal, der leere Raum ist initial. Wenn wir eine Kategorie $\mathcal{C}$ aus einer geordneten Menge $(X,\le)$ machen, wie oben beschrieben, dann ist ein terminales Objekt dasselbe wie ein Element $z\in X$, das $y\le z$ für *alle* $y\in X$ erfüllt. Ein initiales Objekt in dieser Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein Element $z\in X$, das $z\le y$ für *alle* $y\in X$ erfüllt.

Kleine Aufgabe. Wenn eine Kategorie mehrere terminale Objekte hat, dann sind sie alle isomorph zueinander. Wenn eine Kategorie mehrere initiale Objekte hat, dann sind sie alle isomorph zueinander.

Kleine Aufgabe. Die Kategorie der Ringe[2] besitzt ein initiales Objekt. Wie sieht es aus? Gibt es auch ein terminales Objekt in der Kategorie der Ringe?

Definition 1.14. Sei $\mathcal{C}$ irgendeine Kategorie. Wir bauen eine neue Kategorie $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ (die entgegengesetzte Kategorie von $\mathcal{C}$) und fangen an mit $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})=\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Für a,b in $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})=\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ setzen wir

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(a,b)=\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(b,a)\ .$$

Ausserdem definieren wir $\mathrm{id}_a\in\mathrm{mor}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(a,a)$ so, dass es dasselbe ist wie $\mathrm{id}_a\in\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a,a)$. Das weitere kann man sich denken ...

Definition 1.15. *Produkte und Koprodukte.* Gegeben Objekte c und d in einer Kategorie $\mathcal{C}$. Ein *Produkt* von c und d besteht aus einem Objekt e in $\mathcal{C}$ und ausgewählten Morphismen $p_1: e\to c$, $p_2: e\to d$ mit der folgenden Eigenschaft: für jedes Objekt x von $\mathcal{C}$ ist die Abbildung

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(x,e)\longrightarrow\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(x,c)\times\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(x,d)$$

definiert durch $f\mapsto(p_1\circ f,p_2\circ f)$ eine *Bijektion.* Wir schreiben dann

$$e=c\prod d$$

[2]Ringe sollen ein Einselement und ein Nullelement besitzen. Es wird aber nicht verlangt, dass diese verschieden sind. Die Morphismen in der Kategorie der Ringe sind natürlich die Ringhomomorphismen. Von einem Ringhomomorphismus wird unter Anderem verlangt, dass er 1 auf 1 abbildet und 0 auf 0.

oder ähnlich.
Versuch einer Illustration in Pfeilsprache:

$$\begin{tikzcd} & c \\ x \arrow[ur, "g"] \arrow[r, dotted, "f"] \arrow[dr, "h"'] & e \arrow[u, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] \\ & d \end{tikzcd}$$

Der rechte Teil von diesem kommutativen Diagramm ist fest vorgegeben (also c, d, e und p_1, p_2). Das Objekt x und die Pfeile g, h dürfen irgendwie gewählt werden, und dann muss f dadurch eindeutig bestimmt sein.
Analog dazu: Ein *Koprodukt* von c und d besteht aus einem Objekt e in $\mathcal{C}$ und ausgewählten Morphismen $j_1 : c \to e$, $j_2 : d \to e$ mit der folgenden Eigenschaft: für jedes Objekt x von $\mathcal{C}$ ist die Abbildung

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(e, x) \longrightarrow \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(c, x) \times \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(d, x)$$

definiert durch $f \mapsto (f \circ j_1, f \circ j_2)$ eine *Bijektion.* Wir schreiben dann

$$e = c \coprod d$$

oder ähnlich. Illustration in Pfeilsprache:

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, "j_1"'] \arrow[dr, "g"] & \\ e \arrow[r, dotted, "f"] & x \\ d \arrow[u, "j_2"] \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Hier sind wieder c, d, e, j_1, j_2 fest vorgegeben, x und g, h dürfen gewählt werden, und f soll dadurch eindeutig bestimmt sein.

Beispiel 1.16. In der Kategorie der Mengen gibt es für je zwei Objekte S und T ein Produkt. Wir schreiben dafür normalerweise $S \times T$ und haben natürlich die Projektionsabbildungen $p_1 \colon S \times T \to S$ und $p_2 \colon S \times T \to T$, die auch dazugehören.
In der Kategorie der Mengen gibt es für je zwei Objekte S und T ein Koprodukt. Wir nennen es oft die *disjunkte Vereinigung* von S und T und können es zB definieren durch

$$S \coprod T = S \times \{0\} \ \cup \ T \times \{1\}.$$

Dazu gehören die Abbildungen $j_1 : S \to S \coprod T$ und $j_2 : T \to S \coprod T$ definiert durch $j_1(s) = (s, 0)$ und $j_2(t) = (t, 1)$.

Beispiel 1.17. In der Kategorie der topologischen Räume sieht es ähnlich aus. Für je zwei topologische Räume $(X, \mathtt{U})$ und $(Y, \mathtt{V})$ gibt es ein Produkt. Es ist $X \times Y$ mit der Produkttopologie, die von $\mathtt{U}$ und $\mathtt{V}$ bestimmt wird. Dazu gehören natürlich auch die (stetigen) Projektionsabbildungen

$$p_1 \colon X \times Y \to X\ , \qquad p_2 \colon X \times Y \to Y\ .$$

Für je zwei topologische Räume $(X, \mathtt{U})$ und $(Y, \mathtt{V})$ gibt es ein Koprodukt. Es ist die disjunkte Vereinigung $X \coprod Y$ mit Abbildungen $j_1 : X \to X \coprod Y$ und $j_2 \colon Y \to X \coprod Y$ wie oben und der Topologie $\mathtt{W}$, die definiert wird durch

$$(S \in \mathtt{W}) \quad \Leftrightarrow \quad (j_1^{-1}(S) \in \mathtt{U} \text{ und } j_2^{-1}(S) \in \mathtt{V}) \ .$$

Beispiel 1.18. In der Kategorie der Gruppen gibt es für je zwei Objekte G und H ein Produkt. Es ist die Gruppe, die man üblicherweise mit $G \times H$ bezeichnet. Die Projektionsabbildungen $G \times H \to g$ und $G \times H \to H$ gehören auch dazu und sind natürlich Homomorphismen.
Viel interessanter ist das Koprodukt in der Kategorie der Gruppen. Für je zwei Gruppen G und H existiert das Koprodukt von G und H. Es wird oft mit $G * H$ bezeichnet und wird auch das *freie Produkt* von G und H genannt (nicht empfehlenswert, besser *Koprodukt* sagen). Beachten, dass die disjunkte Vereinigung von G und H (als Mengen) dafür nicht in Frage kommt, weil nicht zu sehen ist, wie das eine Gruppe wäre. Um nun also $G * H$ zu konstruieren, betrachten wir Worte

$$x_1 x_2 x_3 \dots x_r$$

in denen die Buchstaben $x_1, \dots, x_r$ aus der disjunkten Vereinigung von G und H genommen werden. (Im folgenden wird so getan, als ob G und H von vornherein disjunkt sind, und wir reden dann einfach von der Vereinigung $G \cup H$.) Die Zahl der Buchstaben, hier r, kann eine beliebige ganze Zahl ≥ 0 sein. Wir führen eine Äquivalenzrelation auf der Menge dieser Worte ein, indem wir sagen

$$x_1 x_2 x_3 \dots x_{k-1} x_k x_{k+1} x_{k+2} \dots x_r \sim x_1 x_2 x_3 \dots x_{k-1} y x_{k+2} \dots x_r$$

falls $x_k, x_{k+1} \in G$ und $y = x_k x_{k+1}$ in G, und auch falls $x_k, x_{k+1} \in H$ und $y = x_k x_{k+1}$ in H. Ausserdem bestimmen wir

$$x_1 x_2 x_3 \dots x_{k-1} x_k x_{k+1} \dots x_r \sim x_1 x_2 x_3 \dots x_{k-1} x_{k+1} \dots x_r$$

falls $x_k = 1 \in G$ oder $x_k = 1 \in H$. (Wir nehmen dann die kleinste Äquivalenzrelation, die alle diese Beziehungen enthält.) Die Menge der so gearteten Äquivalenzklassen von Worten soll $G * H$ heissen. Sie hat eine Verknüpfung, die durch Hintereinanderschreiben von Worten definiert ist:

$$[x_1 x_2 x_3 \dots x_r] \cdot [y_1 y_2 y_3 \dots y_s] = [x_1 x_2 x_3 \dots x_r y_1 y_2 y_3 \dots y_s].$$

Es ist kein grosses Problem, zu zeigen, dass die Verknüpfung wohldefiniert und assoziativ ist. Die Äquivalenzklasse vom leeren Wort ist ein neutrales Element dafür. Es ist auch nicht schwer zu zeigen, dass $G * H$ auf diese Weise eine Gruppe wird, denn das Inverse zu $[x_1 x_2 x_3 \dots x_r]$ ist

$$[x_r^{-1} x_{r-1}^{-1} \dots x_2^{-1} x_1^{-1}].$$

Wir haben Homomorphismen $j_1 \colon G \to G * H$ und $j_2 : H \to G * H$, die jedem Element von G bzw H das ein-buchstabige Wort zuordnen, das diesem Element entspricht. Um zu zeigen, dass $G * H$ mit dieser Wahl von j_1 und j_2 ein Koprodukt von G und H ist, müssen wir uns eine weitere Gruppe L denken und Homomorphismen $f_1 : G \to L$ und $f_2 : H \to L$. Gibt es genau einen Homomorphismus $v : G * H \to L$ mit den Eigenschaften

$v \circ j_1 = f_1$ und $v \circ j_2 = f_2$? Die Antwort ist ja, denn wir müssen und können v nur definieren durch

$$[x_1 x_2 x_3 \ldots x_r] \mapsto f_{i_1}(x_1) \cdot f_{i_2}(x_2) \cdots f_{i_r}(x_r) \in L$$

wobei $i_t = 1$ wenn $x_t \in G$ und $i_t = 2$ wenn $x_t \in H$.

Bemerkung 1.19. Diese Konstruktion vom Koprodukt $G * H = G \coprod H$ (von Gruppen G und H) ist ziemlich einfach, hat aber folgenden Haken. Man möchte manchmal gerne wissen oder benutzen, dass sich jedes Element von $G * H$ auf eindeutige Weise durch ein *reduziertes Wort* $x_1 x_2 x_3 \ldots x_r$ darstellen lässt. Dabei bedeutet reduziert, dass die Buchstaben $x_1, x_2, \ldots, x_r$ abwechselnd aus G und H kommen (und keiner von ihnen $= 1$ ist). Das ist oben nicht bewiesen worden. Es stimmt trotzdem.

Beispiel 1.20. *Produkte und Koprodukte in einer partiell geordneten Menge.* Sei $(X, \leq)$ eine partiell geordnete Menge. Wir haben gesehen (Beispiel 1.6), dass dadurch eine kleine Kategorie bestimmt wird mit Objektmenge X. Wenn jetzt $a, b \in X$ zwei Objekte dieser Kategorie sind, existiert dann das Produkt $a \prod b$ und existiert das Koprodukt, $a \coprod b$?
Wenn $x \in X$ das kategorische Produkt von a und b sein will, dann muss es mit Morphismen $p_1 \colon x \to a$ und $p_2 \colon x \to b$ ausgerüstet sein. Nach unserer Definition der Morphismen bedeutet das einfach, dass $x \leq a$ und $x \leq b$. Ausserdem muss für jedes andere Objekt w gelten, dass $\mathrm{mor}(w, x)$ genau dann nichtleer ist, wenn $\mathrm{mor}(w, a)$ und $\mathrm{mor}(w, b)$ nichtleer sind; also $w \leq x$ genau dann, wenn $w \leq a$ und $w \leq b$. Das heisst, es muss gelten $x = \inf\{a, b\}$. Das genügt dann auch. Ebenso: $y \in X$ ist Koprodukt von a und b in dieser Kategorie genau dann, wenn $y = \sup\{a, b\}$.
Wir schliessen daraus, dass Produkte und Koprodukte in dieser Kategorie nicht notwendig existieren. Zum Beispiel kann man sich denken, dass $X = \{a, b, c\}$ und die Ordnungsrelation besagt $a \leq a, a \leq c, b \leq b, b \leq c$, weiter nichts. Dann existiert kein $\inf\{a, b\}$. Damit existiert das Produkt von a und b in dieser Kategorie nicht.

Bemerkung 1.21. *Eindeutigkeit von Produkten und Koprodukten.* Gegeben Objekte c, d und e in einer Kategorie $\mathcal{C}$ und Morphismen $p_1 : e \to c$, $p_2 : e \to d$ derart, dass e mit p_1 und p_2 sich Produkt von c und d nennen darf. Ausserdem sei gegeben ein anderes Objekt e' in $\mathcal{C}$ und Morphismen $q_1 : e' \to c$ und $q_2 \colon e' \to d$ derart, dass e' mit q_1 und q_2 sich auch Produkt von c und d nennen darf. *Dann ist e isomorph zu e'.* Der Beweis ist ziemlich mechanisch (später kommt er nochmal in allgemeinerer Form) und soll deshalb nur angedeutet werden. Weil e usw ein Produkt von c und d ist, ist speziell die Abbildung

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(e', e) \longrightarrow \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(e', c) \times \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(e', d)$$

gegeben durch $f \mapsto (p_1 \circ f, p_2 \circ f)$ bijektiv. Deswegen hat die Gleichung $(p_1 \circ f, p_2 \circ f) = (q_1, q_2)$ genau eine Lösung $f \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(e', e)$. Ebenso (Rollen von e und e' vertauschen) finden wir ein ausgezeichnetes $g \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(e, e')$. Dann stellt sich heraus, dass $g \circ f = \mathrm{id}_{e'}$ und $f \circ g = \mathrm{id}_e$.
Ähnlich beweist man, dass ein Koprodukt von zwei Objekten c und d in einer Kategorie $\mathcal{C}$ bis auf Isomorphismus eindeutig ist, wenn es überhaupt existiert.

2. Mehr Produkte und Koprodukte; Begriff Funktor

Bemerkung 2.1. *Ein paar Bemerkungen zu Tensorprodukten.* Diese wichtigen Dinge aus der Algebra sollten eigentlich bekannt sein. Gegeben seien abelsche Gruppen A, B und

C. (Wir benutzen additive Schreibweise, also $+$ für die Verknüpfungen in A, B, C und 0 für die neutralen Elemente.) Eine Abbildung

$$f \colon A \times B \to C$$

soll *bilinear* heissen[3], wenn für jedes feste $a_0 \in A$ die Abbildung $b \mapsto f(a_0, b)$ von B nach C ein Homomorphismus von abelschen Gruppen ist, und für jedes feste $b_0 \in B$ die Abbildung $a \mapsto f(a, b_0)$ von A nach C ein Homomorphismus von abelschen Gruppen ist. *Bemerkung*: wenn f so eine bilineare Abbildung von $A \times B$ nach C ist, und $h \colon C \to D$ ein Homomorphismus von abelschen Gruppen, dann ist $h \circ f \colon A \times B \to D$ wieder eine bilineare Abbildung.

Satz und Definition. Zu gegebenen abelschen Gruppen A und B gibt es eine abelsche Gruppe T und eine bilineare Abbildung $\varphi \colon A \times B \to T$ mit der folgenden Eigenschaft. Jede bilineare Abbildung von $A \times B$ in irgendeine abelsche Gruppe C lässt sich in der Form $h \circ \varphi$ schreiben für einen eindeutig bestimmten Homomorphismus von abelschen Gruppen $h \colon T \to C$. Die abelsche Gruppe T heisst *Tensorprodukt von A und B* und wird normalerweise mit $A \otimes B$ bezeichnet.

Die Konstruktion von $T = A \otimes B$ geht so (Skizze). Wir bilden die freie abelsche Gruppe $T^\sharp$ erzeugt von allen Ausdrücken der Form $a \otimes b$, wobei $a \in A$ und $b \in B$ beliebig. Die Elemente von $T^\sharp$ sind also Ausdrücke der Form

$$n_1(a_1 \otimes b_1) + n_2(a_2 \otimes b_2) + \cdots + n_k(a_k \otimes b_k)$$

mit beliebigem $k \geq 0$, wobei $n_j \in \mathbb{Z}$ für $j = 1, \ldots, k$. Statt $1(a \otimes b)$ schreiben wir auch gerne $a \otimes b$, und statt $-1(a \otimes b)$ schreiben wir gerne $-(a \otimes b)$. Sei jetzt $U \subset T^\sharp$ die kleinste (abelsche) Untergruppe, die folgende Elemente enthält:

- alle Elemente der Form $0 \otimes b$ mit $b \in B$ und alle Elemente der Form $a \otimes 0$ mit $a \in A$;
- alle Elemente der Form $a \otimes b - (a' \otimes b) - (a'' \otimes b)$ mit $a = a' + a''$ und alle Elemente der Form $a \otimes b - (a \otimes b') - (a \otimes b'')$ mit $b = b' + b''$.

Wir setzen $T = T^\sharp/U$. Die bilineare Abbildung $\varphi \colon A \times B \to T$ ist definiert durch $\varphi(a, b) = (a \otimes b) + U$. In Worten: $\varphi(a, b)$ ist diejenige Nebenklasse von U, die das Element $a \otimes b \in T^\sharp$ enthält. Wir schreiben allerdings auch gerne $\varphi(a, b) = a \otimes b$, obwohl es bei der hier gegebenen Konstruktion nicht ganz korrekt ist. Das heisst, wir tun so, als ob $a \otimes b$ ein Element von $A \times B$ ist, obwohl es nicht ganz korrekt ist. *Warnung*: Man verfällt manchmal in den Fehler, zu glauben, dass jedes Element von $A \otimes B$ die Form $a \otimes b$ für geeignetes $a \in A$ und $b \in B$ hat. Das ist aber wirklich überhaupt nicht korrekt. Anders ausgedrückt: man soll nicht denken, dass die bilineare Abbildung $\varphi \colon A \times B \to A \otimes B$ in allen Fällen surjektiv ist.

Beispiel. $\mathbb{Z}^m \otimes \mathbb{Z}^n$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}^{m \times n}$. Denn wenn wir eine "Basis" $e_1, \ldots, e_m$ für $\mathbb{Z}^m$ wählen, und eine Basis $e'_1, \ldots, e'_n$ für $\mathbb{Z}^n$, dann bilden die Elemente $e_i \otimes e'_j$ eine Basis für $\mathbb{Z}^m \otimes \mathbb{Z}^n$. Kleine Aufgabe: wie kann man in diesem Fall das Bild von $\varphi \colon \mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^m \otimes \mathbb{Z}^n$ beschreiben?

Andererseits: man überzeuge sich, dass $(\mathbb{Z}/2) \otimes (\mathbb{Z}/3) = 0$. (Es hat etwas damit zu tun, dass es keine sehr interessanten bilinearen Abbildungen von $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/3$ in andere abelsche

[3] Genauer: $\mathbb{Z}$-bilinear, wie später erklärt wird.

Gruppen gibt. Warum ist das so?)
Noch eine Unter-Bemerkung: Das Tensorprodukt ist assoziativ in dem Sinn, dass es einen ausgezeichneten Isomorphismus von $(A \otimes B) \otimes C$ nach $A \otimes (B \otimes C)$ gibt. Wir schreiben deshalb gerne $A \otimes B \otimes C$. Tatsächlich laesst sich $A \otimes B \otimes C$ auch aus A, B, C direkt konstruieren über den Begriff *trilineare Abbildung* ... das sollte einigermassen klar sein, durch Analogie mit der Konstruktion von $A \otimes B$.

Beispiel 2.2. Sei **CRng** die Kategorie der kommutativen Ringe. Genauer: die Objekte von **CRng** sind kommutative Ringe. Es wird darauf bestanden, dass jeder kommutative Ring ein Element 1 besitzt (neutral für Multiplikation), und sowieso ein Element 0 (neutral für Addition), aber es wird nicht darauf bestanden, dass 0 und 1 verschieden sind. Die Menge der Morphismen von R nach S (wobei R, S kommutative Ringe) soll die Menge der Ringhomomorphismen von R nach S sein. (Es wird darauf bestanden, dass so ein Ringhomomorphismus 1_R auf 1_S abbildet.) Zum Beispiel hat $\mathrm{mor}_{\mathbf{CRng}}(\mathbb{Z}, S)$ immer genau ein Element, weil ein Ringhomomorphismus von $\mathbb{Z}$ nach S schonmal $1_{\mathbb{Z}}$ auf 1_S abbilden muss, und das weitere ergibt sich dann von selbst. Also ist $\mathbb{Z}$ ein initiales Objekt in **CRng**.
In dieser Kategorie haben zwei beliebige Objekte R und S ein Produkt. Das ist nicht weiter schwierig: wir bilden das gewöehnliche Produkt $R \times S$ in der Kategorie der Mengen, wir sehen, dass es eine Ringstruktur hat und dass die Projektionen $p_1 \colon R \times S \to R$ und $p_2 \colon R \times S \to S$ Ringhomomorphismen sind. Dann hat $R \times S$ zusammen mit p_1 und p_2 die gewünschte Eigenschaft, die das Produkt $R \prod S$ charakterisiert.
Viel interessanter ist aber mal wieder das Koprodukt. Kurz gesagt, zwei beliebige Objekte R und S in **CRng** besitzen ein Koprodukt, und das Koprodukt ist $R \otimes S$. Etwas ausführlicher bedeutet das:

- Obwohl $R \otimes S$ erstmal als das Tensorprodukt der abelschen Gruppen R und S (nur unter Benutzung der Addition $+$) konstruiert wird, und als solches erstmal nur eine abelsche Gruppe ist, können wir daraus in vernünftiger Weise wieder einen kommutativen Ring machen.
- Die Abbildungen $j_1 \colon R \to R \otimes S$ und $j_2 \colon S \to R \otimes S$ gegeben durch $j_1(x) = x \otimes 1$ und $j_2(y) = 1 \otimes y$ sind dann Ringhomomorphismen.
- Der kommutative Ring $R \otimes S$ zusammen mit den Ringhomomorphismen j_1 und j_2 hat die Eigenschaften, die das Koprodukt $R \coprod S$ charakterisieren.

Das müssen wir jetzt etwas genauer durchnehmen. Die Multiplikation

$$\mu \colon (R \otimes S) \times (R \otimes S) \longrightarrow R \otimes S$$

die wir brauchen, aber noch nicht haben, soll bilinear sein und so einem Homomorphismus von $(R \otimes S) \otimes (R \otimes S)$ nach $R \otimes S$ entsprechen. Dieser Homomorphismus entspricht einer quadri-linearen Abbildung

$$R \times S \times R \times S \to R \times S.$$

Eine solche haben wir in Form von $(a, b, a', b') \mapsto (aa') \otimes (bb')$. Also haben wir μ. Es ist nicht falsch, zu sagen, dass die Multiplikation in $R \otimes S$ durch $(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') := aa' \otimes bb'$ definiert ist, aber man soll dabei daran denken, dass nicht unbedingt jedes Element von $R \otimes S$ die Form $a \otimes b$ hat. Immerhin kann man aus dieser Kurzbeschreibung sehen, dass μ assoziativ und kommutativ ist, und dass es ein neutrales Element dafür in Form von

$1_R \otimes 1_S$ gibt. Ausserdem ist dann auch ziemlich klar, dass die Formeln für j_1 und j_2 in Ordnung sind, also Ringhomomorphismen definieren.
Jetzt stelle man sich die Situation

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[d, "j_1"'] \arrow[dr, "g"] & \\
R \otimes S \arrow[r, dotted, "f"] & T \\
S \arrow[u, "j_2"] \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

vor. Hier dürfen der komutative Ring T und die Ringhomomorphismen g, h gewählt werden, und der Ringhomomorphismus f soll dadurch eindeutig bestimmt sein. Eine skizzenmässige Lösung: Wir haben erstmal eine bilineare Abbildung von der abelschen Gruppe $R \times S$ in die abelsche Gruppe T durch $(a, b) \mapsto g(a) \cdot h(b) \in T$. Wegen der guten Eigenschaften von $R \otimes S$ bestimmt diese einen Homomorphismus von abelschen Gruppen $f\colon R \otimes S \to T$, der mit Recht in der Form

$$f(a \otimes b) = g(a) \cdot h(b)$$

beschrieben werden kann (obwohl ..., usw.). Aus dieser Beschreibung ersieht man, dass f ein Ringhomomorphismus ist. Also: das f wie im Diagramm existiert. Umgekehrt: Wenn das f wie im Diagramm gegeben ist, muss es erfüllen:

$$f(a \otimes b) = f(j_1(a) \cdot j_2(b)) = f(j_1(a)) \cdot f(j_2(b)) = g(a) \cdot h(b)$$

für alle $a \in R$ und $b \in S$. Also ist f eindeutig. Damit ist gezeigt, dass $R \otimes S$ sich Koprodukt von R und S in der Kategorie **CRng** nennen darf.

Die kategorische Sichtweise kann natürlich vor den Kategorien nicht haltmachen, so dass diese auch Objekte einer Art Über-Kategorie werden. Die Morphismen in dieser Über-Kategorie heissen *Funktoren.*

Definition 2.3. Gegeben Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$. Ein *Funktor* F von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ ist eine Regel, die zu jedem Objekt c von $\mathcal{C}$ ein Objekt $F(c)$ in $\mathcal{D}$ auswählt, und zu jedem Morphismus $g\colon c \to c'$ in $\mathcal{C}$ einen Morphismus

$$F(g)\colon F(c) \to F(c'),$$

so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

- Für einen Identitätsmorphismus $\mathrm{id}_c\colon c \to c$ in $\mathcal{C}$ ist immer
$$F(\mathrm{id}_c) = \mathrm{id}_{F(c)}\colon F(c) \to F(c).$$
- F respektiert Zusammensetzung. Das heisst kurz gesagt $F(g \circ h) = F(g) \circ F(h)$. Etwas ausführlicher: wenn $h\colon a \to b$ und $g\colon b \to c$ Morphismen in $\mathcal{C}$ sind, dann stimmt $F(g \circ h)\colon F(a) \to F(c)$ überein mit $F(g) \circ F(h)\colon F(a) \to F(c)$.

Manchmal sagt man auch *kovarianter Funktor* statt *Funktor.* Ein *kontravarianter Funktor* von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ ist nämlich ein kovarianter Funktor von $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ nach $\mathcal{D}$. Wenn man das sorgfältig auseinandernimmt, erhält man folgende explizite Beschreibung. Ein *kontravarianter Funktor* G von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ ist eine Regel, die zu jedem Objekt c von $\mathcal{C}$ ein

Objekt $G(c)$ in $\mathcal{D}$ auswählt, und zu jedem Morphismus $f\colon c \to c'$ in $\mathcal{C}$ einen Morphismus $G(f)\colon G(c') \to G(c)$, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

- Für einen Identitätsmorphismus $\mathrm{id}_c\colon c \to c$ in $\mathcal{C}$ ist immer
$$G(\mathrm{id}_c) = \mathrm{id}_{G(c)}\colon G(c) \to G(c).$$
- G respektiert Zusammensetzung. Genauer, wenn $f\colon a \to b$ und $e\colon b \to c$ Morphismen in $\mathcal{C}$ sind, dann stimmt $G(e \circ f)\colon G(c) \to G(a)$ überein mit
$$G(f) \circ G(e)\colon G(c) \to G(a).$$

Im Fall eines kovarianten Funktors F angewandt auf einen Morphismus g von c nach c' schreibt man auch gerne $g_*\colon F(c) \to F(c')$ statt $F(g)\colon F(c) \to F(c')$. Im Falle eines kontravarianten Funktors G angewandt auf einen Morphismus f von c nach c' schreibt man auch gerne $f^*\colon G(c') \to G(c)$ statt $G(f)\colon G(c') \to G(c)$.

Beispiel 2.4. *Potenzmenge kontravariant.* Für eine Menge X sei $P(X)$ die Potenzmenge von X, Menge aller Teilmengen von X. Eine Abbildung zwischen Mengen, $f\colon X \to Y$, bestimmt eine Abbildung
$$P(f)\colon P(Y) \to P(X)$$
durch $P(f)(W) := f^{-1}(W) := \{x \in X \mid f(x) \in W\}$ für $W \in P(Y)$, das heisst W Teilmenge von Y. Wenn $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Abbildungen zwischen Mengen sind, dann stimmt $P(g \circ f)\colon P(Z) \to P(X)$ überein mit $P(f) \circ P(g)\colon P(Z) \to P(X)$, denn für $V \in P(Z)$ ist $P(g \circ f)(V) = (g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V)) = P(f)(P(g)(V))$. Also ist "$P$" ein kontravarianter Funktor von **Set** nach **Set**.

Beispiel 2.5. *Potenzmenge kovariant.* Um Verwirrung halbwegs zu vermeiden, schreibe ich jetzt $P_!(X)$ für die Potenzmenge von X, denn hier soll $P_!$ zu einem *kovarianten* Funktor gemacht werden. Eine Abbildung zwischen Mengen, $f\colon X \to Y$, bestimmt eine Abbildung
$$P_!(f)\colon P_!(X) \to P_!(Y)$$
durch $P_!(f)(W) := f(W) := \{f(x) \mid x \in X\}$ für $W \in P_!(X)$. Wenn $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Abbildungen zwischen Mengen sind, dann stimmt
$$P_!(g \circ f)\colon P_!(X) \to P_!(Z)$$
überein mit $P_!(g) \circ P_!(f)\colon P_!(X) \to P_!(Z)$, denn für $V \in P_!(X)$ ist $P_!(g \circ f)(V) = (g \circ f)(V) = g(f(V)) = P_!(g)(P_!(f)(V))$. Damit ist "$P_!$" ein kovarianter Funktor von **Set** nach **Set**.

Beispiel 2.6. *Einheitengruppe von Ring.* Hier brauchen wir **Rng**, die Kategorie der Ringe. Als Objekte sind alle Ringe mit 1 zugelassen. Kommutativität der Multiplikation wird nicht verlangt. Für solche Ringe R und S ist $\mathrm{mor}_{\mathbf{Rng}}(R,S)$ die Menge der Ringhomomorphismen von R nach S. (Ein Ringhomomorphismus $f\colon R \to S$ soll $f(1_R) = 1_S$ erfüllen.)
Sei jetzt R ein Ring, das heisst Objekt von **Rng**. Sei $U(R) = R^\times$ die Einheitengruppe von R, also
$$U(R) = \{x \in R \mid \exists y \in R \text{ mit } xy = yx = 1\}.$$
Ein Ringhomomorphismus $f\colon R \to S$, also $f \in \mathrm{mor}_{\mathbf{Rng}}(R,S)$, bestimmt durch Einschränkung eine Abbildung $U(R) \to U(S)$, die wir $U(f)$ nennen könnnen und die sich

dann auch als Gruppenhomomorphismus erweist. Damit wird U zu einem kovarianten Funktor von **Rng** nach **Grp**. Es sollte klar sein, dass die Funktoreigenschaften tatsächlich erfüllt sind.

Beispiel 2.7. *Kettenregel.* Hier müssen wir uns erstmal eine Kategorie $\mathcal{K}$ bauen. Die Objekte von $\mathcal{K}$ sollen offene Teilmengen V von einem $\mathbb{R}^m$ sein, wobei alle ganzen Zahlen $m \geq 0$ erlaubt sind. Um genauer zu sein, sollte man wohl sagen: ein Objekt von $\mathcal{K}$ ist ein Paar (m, V) mit $m \geq 0$ und V offene Teilmenge von $\mathbb{R}^m$. Die Menge der Morphismen von (m, V) nach (n, W) soll die Menge der glatten (unendlich oft differenzierbaren) Abbildungen von V nach W sein.
Wir wollen jetzt einen Funktor T von $\mathcal{K}$ nach $\mathcal{K}$ bauen. Auf den Objekten ist T definiert durch

$$T(m, V) = (2m, V \times \mathbb{R}^m) \ .$$

(Dazu muss natürlich $V \times \mathbb{R}^m$ als offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{2m} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ aufgefasst werden.) Für einen Morphismus $g\colon (m, V) \to (n, W)$, also glatte Abbildung $g\colon V \to W$, soll $T(g)$ die glatte Abbildung von $V \times \mathbb{R}^m$ nach $W \times \mathbb{R}^n$ sein, die gegeben ist durch

$$T(g)(x, q) = (g(x), g'(x)(q)).$$

Dabei ist $g'(x)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, nämlich die totale Ableitung (Jacobimatrix) von g an der Stelle x, die hier auf den Vektor $q \in \mathbb{R}^m$ losgelassen wird, so dass $g'(x)(q) \in \mathbb{R}^n$.
Hier ist gerade die Funktoreigenschaft nicht unmittelbar klar, also die Behauptung

$$T(g \circ f) = T(g) \circ T(f).$$

Sie ist aber gleichwertig zur *Kettenregel* für totale Ableitungen:

$$\begin{aligned} T(g \circ f)(x, q) &= (g(f(x)), (gf)'(x)(q)) = (g(f(x)), (g'(f(x))(f'(x)(q))) \\ &= T(g)(f(x), f'(x)(q)) = T(g)(T(f)(x, q)). \end{aligned}$$

Beispiel 2.8. Sei **Top** wie üblich die Kategorie der topologischen Räume (mit stetigen Abbildungen als Morphismen). Sei **Poset** die Kategorie aller partiell geordneten Mengen (auf Englisch: partially ordered sets, posets). Genauer: Ein Objekt von **Poset** ist ein Paar bestehend aus einer Menge S und einer Relation ρ auf S, die transitiv, reflexiv und antisymmetrisch ist (antisymmetrisch im Sinne von $s\rho t \wedge t\rho s \Rightarrow (s = t)$). Wir schreiben meistens $s \leq t$ statt $s\rho t$. Ein Morphismus in **Poset** von $(S, \leq)$ nach $(T, \leq)$ ist eine Abbildung f von S nach T mit der Eigenschaft, dass $f(x) \leq f(y)$ falls $x \leq y$ in S.
Ein *kontravarianter* Funktor F von **Top** nach **Poset** ist definiert wie folgt. Für einen topologischen Raum $(X, \mathtt{U})$ ist $F(X, \mathtt{U}) = \mathtt{U}$, aufgefasst als partiell geordnete Menge durch Inklusion. Hier ist natürlich $\mathtt{U}$ die Menge derjenigen Teilmengen von X, die als offen deklariert worden sind. Für $V, W \in \mathtt{U}$ soll $V \leq W$ bedeuten, dass $V \subset W$. Eine stetige Abbildung $g\colon (X, \mathtt{U}) \longrightarrow (Y, \mathtt{W})$ induziert einen Morphismus von partiell geordneten Mengen

$$F(g)\colon F(Y, \mathtt{W}) = \mathtt{W} \quad \longrightarrow F(X, \mathtt{U}) = \mathtt{U}$$

durch $W \mapsto g^{-1}(W)$ für $W \in \mathtt{W}$. Damit wird F ein kontravarianter Funktor. Die Funktoreigenschaften sind leicht zu verifizieren.

Beispiel 2.9. *Mor-Funktoren.* Sei $\mathcal{D}$ irgendeine Kategorie und c ein festes Objekt von $\mathcal{D}$. Wir bauen einen kontravarianten Funktor F_c von $\mathcal{D}$ nach **Set** wie folgt. Für ein Objekt x von $\mathcal{D}$ ist $F_c(x)$ die Menge $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(x,c)$ der Morphismen von x nach c. Für einen Morphismus $g\colon x \to y$ in $\mathcal{D}$ ist $F_c(g)\colon \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(y,c) \to \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(x,c)$ die Abbildung, die durch Zusammensetzen mit g gegeben ist, also $h \mapsto h \circ g$ für $h \in \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(y,c)$.
Ähnlich: wir bauen einen kovarianten Funktor G_c von $\mathcal{D}$ nach **Set** wie folgt. Für ein Objekt x von $\mathcal{D}$ ist $F_c(x)$ die Menge $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(c,x)$ der Morphismen von c nach x. Für einen Morphismus $f\colon x \to y$ in $\mathcal{D}$ ist $G_c(f)$ die Abbildung von $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(c,x)$ nach $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(c,y)$, die durch Zusammensetzen mit f gegeben ist, also $h \mapsto f \circ h$ für $h \in \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(c,x)$.
Es ist üblich und auch praktisch, diese beiden Funktoren $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(-,c)$ und $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(c,-)$ zu nennen, statt F_c und G_c.

Beispiel 2.10. *Vergissfunktoren.* Wenn die Objekte einer Kategorie $\mathcal{C}$ als Mengen mit zusätzlicher Struktur definiert sind, und die Morphismen in $\mathcal{C}$ als strukturerhaltende Abbildungen, dann gibt es einen Vergissfunktor von $\mathcal{C}$ nach **Set**, der jedem Objekt aus $\mathcal{C}$ die *unterliegende* Menge zuordnet undsoweiter. Beispiel: Der Vergissfunktor V von **Grp** nach **Set** ist auf Objekten definiert durch $V(G) = G$, wobei allerdings G auf der linken Seite der Definition als Gruppe bzw. Menge mit Zusatzstruktur in Form einer Abbildung $G \times G \to G$ mit gewissen Eigenschaften aufgefasst wird, während G auf der rechten Seite einfach als Menge aufgefasst wird. Ein Morphismus $f\colon G \to H$ in **Grp**, auch Gruppenhomomorphismus genannt, bestimmt eine Abbildung $V(f)\colon G \to H$ von Mengen, einfach durch $V(f) = f$. Wir bemühen uns, zu vergessen, dass f mal ein Homomorphismus war.
Ähnlich: es gibt einen Vergissfunktor von **Top** nach **Set**, der jedem topologischen Raum $(X, \mathtt{U})$ die unterliegende Menge X zuordnet, und jeder stetigen Abbildung zwischen topologischen Räumen die unterliegende Abbildung zwischen Mengen. Hier bemühen wir uns, zu vergessen, dass Abbildungen mal stetig waren.

Um mal wieder etwas Abstrakte(re)s zu sagen: Es sollte klar sein, dass Funktoren manchmal zusammengesetzt werden können. Wenn $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ kovariante Funktoren sind, dann ist $G \circ F$ ein kovarianter Funktor von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$. Ausserdem gibt es für jede Kategorie $\mathcal{C}$ einen Identitätsfunktor $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{C}$. In diesem Sinne sind Kategorien die Objekte einer Überkategorie **Catg**, deren Morphismen die Funktoren sind. Kleines Problem: Wenn $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Kategorien sind, dann ist es nicht immer zulässig, von einer *Menge* der Funktoren von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ zu reden.

3. Natürliche Transformationen und Yoneda-Lemma

Die Funktoren von einer Kategorie $\mathcal{C}$ in eine andere Kategorie $\mathcal{D}$ bilden auch so etwas wie eine Über-Kategorie, deren Morphismen natürliche Transformationen heissen.

Definition 3.1. Gegeben Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ sowie Funktoren F und G, beide von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$. Eine *natürliche Transformation* τ von F nach G ist eine Regel, die für jedes Objekt c von $\mathcal{C}$ einen Morphismus

$$\tau(c) \in \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(F(c), G(c))$$

auswählt und dabei die folgende Bedingung erfüllt. Für jeden Morphismus $h\colon c_0 \to c_1$ in $\mathcal{C}$ ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(c_0) & \xrightarrow{F(h)} & F(c_1) \\ {\scriptstyle\tau(c_0)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\tau(c_1)} \\ G(c_0) & \xrightarrow{G(h)} & G(c_1) \end{array}$$

in $\mathcal{D}$ *kommutativ*, das heisst, $\tau(c_1) \circ F(h) = G(h) \circ \tau(c_0)$. Standardbezeichnung dafür:

$$F \overset{\tau}{\Longrightarrow} G$$

oder präzisere Varianten, in denen man auch $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ sehen kann. Statt $\tau(c)$ schreibt man gerne auch τ_c in den Fällen, wo τ_c nach weiteren Eingaben dürstet.

Definition 3.2. Eine natürliche Transformation τ von $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ nach $G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ (Bezeichnungen wie oben) heisst *natürlicher Isomorphismus* oder *natürliche Äquivalenz*, wenn $\tau(c) \in \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(F(c), G(c))$ ein Isomorphismus ist für jedes Objekt c in $\mathcal{C}$. In so einem Fall sagt man, dass F *natürlich isomorph* zu G ist.

Beispiel 3.3. *Teilmengen und charakteristische Funktionen.* Aus Beispiel 2.4 haben wir $P\colon \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$, den (kontravarianten) Funktor *Potenzmenge.* Sei $S = \{0, 1\}$, aufgefasst als Objekt in $\mathbf{Set}$, und sei $\mathrm{mor}_{\mathbf{Set}}(-, S)$ der zugehörige Mor-Funktor wie in Beispiel 2.9. Es gibt einen natürlichen Isomorphismus τ von $\mathrm{mor}_{\mathbf{Set}}(-, S)$ nach P. Er wählt für jedes Objekt T in $\mathbf{Set}$ die Bijektion

$$\tau_T\colon \mathrm{mor}_{\mathbf{Set}}(T, S) \longrightarrow P(T)$$

aus, die wir ganz gut kennen und schätzen: $\tau_T(f) \in P(T)$ ist das Urbild der Teilmenge $\{1\}$ von S unter der Abbildung $f\colon T \to S$.
Dieses Beispiel ist mindestens so wichtig, wie es langweilig ist, und ich hoffe, dass wir noch abenteuerlichere Varianten davon sehen werden.

Beispiel 3.4. *Determinante.* Für festes $n \geq 1$ haben wir einen Funktor GL_n von $\mathbf{CRng}$ nach $\mathbf{Grp}$, wobei $\mathbf{CRng}$ wie üblich die Kategorie der kommutativen Ringe ist. Wir können die Determinante auffassen als natürliche Transformation von GL_n nach GL_1. Genauer: für jeden kommutativen Ring R haben wir den Gruppenhomomorphismus

$$\tau_R = \det\colon \mathrm{GL}_n(R) \to \mathrm{GL}_1(R) = R^\times .$$

Es ist eine natürliche Transformation von GL_n nach GL_1 , denn für jeden Ringhomomorphismus $h\colon R \to S$ ist das Diagramm von Gruppenhomomorphismen

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(R) & \xrightarrow{\mathrm{GL}_n(h)} & \mathrm{GL}_n(S) \\ \big\downarrow{\scriptstyle\det} & & \big\downarrow{\scriptstyle\det} \\ \mathrm{GL}_1(R) & \xrightarrow{\mathrm{GL}_1(h)} & \mathrm{GL}_1(S) \end{array}$$

kommutativ. Beachten, dass $\mathrm{GL}_n(h)$ bedeutet: h wird angewandt auf Einträge von gewissen $n \times n$-Matrizen.

Definition 3.5. (Diese Definition ist nicht als Unterbrechung gedacht, sondern soll weiterführen zu einem Beispiel von natürlichen Transformationen.) Ein Funktor F von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ heisst *treu*, wenn für zwei beliebige Objekte c und c' in $\mathcal{C}$ die durch F bestimmte Abbildung von $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(c,c')$ nach $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(F(c),F(c'))$ *injektiv* ist, und *voll*, wenn sie *surjektiv* ist.

Gegeben Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$. Ein Funktor $F\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ heisst *Äquivalenz* (von Kategorien), wenn er voll treu ist und ausserdem jedes Objekt von $\mathcal{D}$ isomorph ist zu einem Objekt der Form $F(c)$, wobei c Objekt von $\mathcal{C}$. Wenn so ein F existiert, sagen wir, dass $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ äquivalente Kategorien sind ... allgemeiner, wenn man $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ in endlich vielen Schritten durch solche Äquivalenzen verbinden kann, dann sagen wir, dass $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ äquivalente Kategorien sind.

Natürlich kann es auch sinnvoll sein, zu sagen, dass Kategorie $\mathcal{C}$ isomorph ist zu Kategorie $\mathcal{D}$ (falls ein Funktor F von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ existiert, der invertierbar ist). Es ist bestimmt sinnvoll, wenn $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ kleine Kategorien sind. Aber der Begriff *Äquivalenz von Kategorien* ist wichtiger.

Beispiel 3.6. Sei $\mathcal{D}$ die Kategorie der endlichen Mengen. (Die Objekte sind also alle endlichen Mengen ... die Morphismen von der endlichen Menge S in die endliche Menge T sollen die Abbildungen von S nach T sein.) Sei $\mathcal{C}$ die folgende Unterkategorie: als Objekte lassen wir alle Mengen $\underline{n}=\{1,2,\dots,n\}$ zu, wobei n eine nichtnegative ganzen Zahl sein darf. (Dabei soll $\underline{0}$ die leere Menge bedeuten.) Als Morphismen lassen wir alle Abbildungen zwischen diesen speziellen endlichen Mengen zu. Dann ist die Inklusion $\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ eine Äquivalenz von Kategorien.

Beispiel 3.7. Sei S irgendeine nichtleere Menge. Wir machen daraus eine (kleine) Kategorie $\mathcal{E}_S$ wie folgt: die Objekte sind die Elemente von S, und für zwei beliebige Elemente $x,y\in S$ soll $\mathrm{mor}(x,y)$ genau ein Element haben (das wir irgendwie benennen können, mir egal). Es ist dann klar, wie die Zusammensetzung von Morphismen geht und was die Identitätsmorphismen sind. Sei jetzt T irgendeine andere nichtleere Menge. Dann sind die Kategorien $\mathcal{E}_S$ und $\mathcal{E}_T$ äquivalent.

Beispiel 3.8. *... oder Satz.* Ein Funktor $F\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ zwischen kleinen Kategorien ist eine Äquivalenz genau dann, wenn es einen Funktor $G\colon\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ gibt, so dass $G\circ F$ natürlich isomorph zu $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ ist und $F\circ G$ natürlich isomorph zu $\mathrm{id}_{\mathcal{D}}$.

Beweis. Angenommen, F ist Äquivalenz. Wähle für jedes Objekt d von $\mathcal{D}$ ein Objekt $G(d)$ in $\mathcal{C}$ und einen Isomorphismus $u_d\colon F(G(d))\to d$. Für einen Morphismus $h\colon d_0\to d_1$ in $\mathcal{D}$ sei $G(h)\in\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(G(d_0),G(d_1))$ die eindeutige Lösung von

$$F(G(h)) = u_{d_1}^{-1}\circ h\circ u_{d_0} : F(G(d_0))\to F(G(d_1))\ .$$

Dan kann man sich leicht überlegen, dass G ein Funktor ist. Die Isomorphismen u_d bilden einen natürlichen Isomorphismus von $F\circ G$ nach $\mathrm{id}_{\mathcal{D}}$. Die Isomorphismen $F^{-1}(u_{F(c)})$ bilden einen natürlichen Isomorphismus von $G\circ F$ nach $\mathrm{id}_{\mathcal{D}}$. (Ausführlicher: für Objekt c in $\mathcal{C}$ ist $u_{F(c)}$ ein Isomorphismus von $F(G(F(c)))$ nach $F(c)$. Diesem entspricht ein Isomorphismus von $G(F(c))$ nach c, weil F voll treu ist.)
Andere Richtung: leichter, daher Übungsaufgabe. $\square$

Jetzt weiter zu einem wichtigen neuen Begriff.

Definition 3.9. . Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $F\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ ein (kontravarianter) Funktor. Der Funktor F heisst *darstellbar*, wenn ein Objekt c in $\mathcal{C}$ existiert, so dass F natürlich isomorph zum Mor-Funktor $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)$ ist.
Ebenso heisst ein kovarianter Funktor $G\colon \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ *darstellbar*, wenn ein Objekt d in $\mathcal{C}$ existiert, so dass G natürlich isomorph zum Mor-Funktor $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(d,-)$ ist.

Bemerkung 3.10. Ein $F\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ ist genau dann darstellbar, wenn es ein Objekt $c \in \mathcal{C}$ gibt und ein Element $u \in F(c)$ derart, dass für jedes Objekt $b \in \mathcal{C}$ und Element $x \in F(b)$ genau ein Morphismus $\varphi_x\colon b \to c$ existiert mit $F(\varphi_x)(u) = x$. Denn wenn es so ein c und u gibt, dann haben wir den gewünschten Isomorphismus von F nach $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)$ durch $F(b) \ni x \mapsto \varphi_x \in \mathrm{mor}(b,c)$. Andererseits, wenn F isomorph zu $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)$, dann dürfen wir gleich annehmen $F = \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)$. Wir wählen dann

$$u = \mathrm{id}_c \in F(c) = \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(c,c)\ .$$

Dann ist für $x \in F(b) = \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(b,c)$ das φ_x tautologisch bestimmt, $\varphi_x = x$.

Definition 3.11. Wir nennen in so einem Fall c ein darstellendes Objekt für F, und $u \in F(c)$ ein *universelles* Element.

Beispiel 3.12. Wir hatten schon gesehen, dass der (kontravariante) Funktor

$$P\colon \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$$

(Potenzmenge) darstellbar ist. Ein darstellendes Objekt ist die Menge $S = \{0,1\}$, und ein dazu passendes universelles Element $u \in P(S)$ ist die Teilmenge $\{1\}$ von S. Man kann ohne Übertreibung sagen, dass es die universelle Teilmenge ist.

Beispiel 3.13. Der zusammengesetzte Funktor $V \circ \mathrm{GL}_1\colon \mathbf{CRng} \to \mathbf{Set}$ ist darstellbar (wobei V der Vergissfunktor von **Grp** nach **Set** ist, während GL_1 immer noch ein Funktor von **CRng** nach **Grp** sein soll). Ein darstellendes Objekt ist $R = \mathbb{Z}[t,t^{-1}]$, der Laurent-Polynomring (Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$). Ein universelles Element dazu ist $t \in V(\mathrm{GL}_1(R))$. Denn wenn S irgendein anderer kommutativer Ring ist und $x \in \mathrm{GL}_1(S)$, dann gibt es genau einen Ringhomomorphismus von $R = \mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ nach S, der t auf x abbildet.

Beispiel 3.14. Der zusammengesetzte Funktor $V \circ \mathrm{GL}_n\colon \mathbf{CRng} \to \mathbf{Set}$ ist auch darstellbar. Ein darstellendes Objekt ist

$$R = \mathbb{Z}[v,t_{ij}]\Big/(v \cdot \det(t_{ij}) - 1)$$

wobei $i,j \in \{1,\dots,n\}$. (Das ist so gemeint: wir machen erstmal den Polynomring mit n^2+1 Variablen v und t_{ij} für $i,j \in \{1,\dots,n\}$. Wir erzwingen dann die Relation $v \cdot \det(t_{ij}) = 1$, indem wir das Hauptideal erzeugt von $v \cdot \det(t_{ij}) - 1$ austeilen. Sinn dieser Aktion ist, $\det(t_{ij})$ invertierbar zu machen.) Ein universelles Element zu diesem darstellenden Objekt ist die Matrix $(t_{ij}) \in V(\mathrm{GL}_n(R))$. (Ja, sie ist invertierbar, weil ihre Determinante in R invertierbar ist.) Denn wenn S irgendein anderer kommutativer Ring ist und $(x_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(S)$, dann gibt es genau einen Ringhomomorphismus von R nach S, der t_{ij} auf x_{ij} abbildet und damit die Matrix (t_{ij}) auf (x_{ij}).

Lemma 3.15. *Sei $F\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ ein darstellbarer Funktor. Es soll angenommen werden, dass wir zwei darstellende Objekte haben: ein c mit universellem Element $u \in F(c)$ und ein d mit universellem Element $v \in F(d)$. Dann gibt es genau einen Morphismus $h\colon c \to d$ derart, dass $F(h)(v) = u$, und er ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Weil v universell, gibt es genau ein $h\colon c \to d$ mit $h^*(v) = u$. Weil u universell, gibt es genau ein $g\colon d \to c$ mit $g^*(u) = v$. Dann ist $(gh)^*(u) = h^*g^*(u) = u$ und weil u universell, folgt daraus $gh = \mathrm{id}_c$. Ähnlich $hg = \mathrm{id}_d$. □

Satz 3.16. (Lemma von Yoneda.) *Sei $G\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ irgendein Funktor, $F = \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)$ für ein festes Objekt c in $\mathcal{C}$. Dann ist die Abbildung, die jeder natürlichen Transformation $\tau\colon F \Rightarrow G$ ihren Wert $\tau(\mathrm{id}_c) \in G(c)$ zuordnet, eine Bijektion. Das heisst, zu jedem $x \in G(c)$ gibt es genau ein $\tau\colon F \Rightarrow G$ mit $\tau(\mathrm{id}_c) = x$.*

Beweis. Gegeben τ. Sei $x = \tau(\mathrm{id}_c) \in G(c)$. Gegeben irgendein Objekt $b \in \mathcal{C}$ und $w \in F(b)$. Dann ist w ein Morphismus von b nach c und es gilt

$$F(w)(\mathrm{id}_c) = w$$

wobei $F(w)$ auf der linken Seite gelesen werden soll als F angewandt auf diesen Morphismus, während das w auf der rechten Seite der Gleichung als Element von $F(b)$ gehandelt wird. Also muss gelten

$$\tau(w) = \tau(F(w)(\mathrm{id}_c)) = G(w)(\tau(\mathrm{id}_c)) = G(w)(x)$$

wegen Natürlichkeit von τ. Wir sehen also, dass τ durch x vollständig bestimmt ist. Andererseits kann diese Bestimmung von τ durch x auch als Definition genommen werden, wobei $x = \tau(\mathrm{id}_c) \in G(c)$ vorgegeben ist. □

Bemerkung 3.17. Dieser Beweis mag verwirrend sein. Mit einer etwas anderen Formulierung kann man die Idee deutlicher machen. *Sei $G\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ irgendein Funktor und $F\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ ein darstellbarer Funktor mit darstellendem Objekt c und universellem Element $u \in F(c)$. Dann ist die Abbildung, die jeder natürlichen Transformation $\tau\colon F \Rightarrow G$ ihren Wert $\tau(u) \in G(c)$ zuordnet, eine Bijektion.* Beweis: Gegeben Objekt b in $\mathcal{C}$ und $x \in F(b)$. Dann existiert nach Voraussetzung eindeutiges $\varphi_x\colon b \to c$ mit $F(\varphi_x)(u) = x$. Weil τ natürlich ist, muss gelten

$$\tau_b(x) = \tau_b(F(\varphi_x)(u)) = G(\varphi_x)(\tau_c(u)) \ \in G(b).$$

Weil b und $x \in F(b)$ ganz beliebig waren, sieht man daraus, dass und wie τ bestimmt ist durch das Element $\tau_c(u) \in G(c)$.

Korollar 3.18. *Für zwei beliebige Objekte c, d in $\mathcal{C}$ entsprechen die natürlichen Transformationen*

$$\tau\colon \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c) \to \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,d)$$

genau den Morphismen von c nach d, und zwar durch die Formel $\tau \mapsto \tau(\mathrm{id}_c) \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(c,d)$.

Selbstverständlich gibt es vom Yoneda-Lemma usw.usw. auch eine kovariante Version. Die Formulierung wird der Leserin und dem Leser überlassen.

Definition 3.19. *Kleiner Ausflug.* Ein *Gruppenobjekt* in einer Kategorie $\mathcal{D}$ besteht aus einem Objekt c in $\mathcal{D}$ und einem Funktor $L\colon \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Grp}$ derart, dass $V \circ L = \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(-, c)$, wobei $V\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ den Vergissfunktor bezeichnet:

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{Grp} \arrow[d, "\text{Vergiss}"] \\ \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \arrow[ur, dotted, "L"] \arrow[r, "\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(-,c)"'] & \mathbf{Set} \end{tikzcd}$$

Ein *Kogruppenobjekt* in einer Kategorie $\mathcal{D}$ besteht aus einem Objekt c in $\mathcal{D}$ und einem kovarianten Funktor $L\colon \mathcal{D} \to \mathbf{Grp}$ derart, dass $V \circ L = \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(c, -)$:

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{Grp} \arrow[d, "\text{Vergiss}"] \\ \mathcal{D} \arrow[ur, dotted, "L"] \arrow[r, "\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(c,-)"'] & \mathbf{Set} \end{tikzcd}$$

Beispiel 3.20. Jede gewöhnliche Gruppe G lässt sich als Gruppenobjekt in der Kategorie **Set** verkaufen. Denn für jede Menge S wird $\mathrm{mor}_{\mathbf{Set}}(S, G)$, die Menge der Abbildungen von S nach G, zu einer Gruppe durch punktweise Multiplikation. Gibt es auch interessante Kogruppenobjekte in **Set** ? Es gibt jedenfalls mindestens ein Kogruppenobjekt in **Set**, die leere Menge.

Beispiel 3.21. In der Kategorie $\mathbf{Toph}_*$, Homotopiekategorie der punktierten topologischen Räume, gibt es ein berühmtes Kogruppenobjekt S^1.
Ein Objekt von $\mathbf{Toph}_*$ ist ein topologischer Raum X mit einem ausgezeichneten Element $x_0 \in X$, genannt *Grundpunkt.* Ein Morphismus von (X, x_0) nach (Y, y_0) ist eine Homotopieklasse von grundpunkterhaltenden stetigen Abbildungen von (X, x_0) nach (Y, y_0). Dabei heisst eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ grundpunkterhaltend, wenn $f(x_0) = y_0$. Wir lassen hier nur Homotopien $(h_t)_{t\in[0,1]}$ zwischen stetigen Abbildungen von X nach Y zu, bei denen jedes $h_t\colon X \to Y$ grundpunkterhaltend ist. In $\mathbf{Toph}_*$ gibt es Koprodukte: das Koprodukt von (X, x_0) und (Y, y_0) ist die Einpunktsumme $(X \vee Y, z_0)$. Dabei ist $X \vee Y$ der Quotientenraum, der entsteht, wenn man in der disjunkten Vereinigung (Koprodukt in **Top**) von X und Y die beiden Punkte $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$ gleichsetzt; dieses Element von $X \vee Y$ habe ich z_0 genannt.
Als Grundpunkt in S^1 können wir $1 \in S^1$ nehmen, in komplexer Schreibweise ($S^1 \subset \mathbb{C}$). Sei $\kappa\colon S^1 \to S^1 \vee S^1$ die grundpunkterhaltende Abbildung, die den oberen Halbbogen von S^1 auf den linken Summanden S^1 von $S^1 \vee S^1$ abbildet durch $z \mapsto z^2$, komplexe Schreibweise, und den unteren Halbbogen auf den rechten Summanden S^1 von $S^1 \vee S^1$, wieder durch $z \mapsto z^2$. Zusammensetzen mit κ gibt für jedes Objekt $X = (X, x_0)$ in $\mathbf{Toph}_*$ eine Abbildung

$$\mathrm{mor}(S^1 \times X) \times \mathrm{mor}(S^1, X) \cong \mathrm{mor}(S^1 \vee S^1, X) \longrightarrow \mathrm{mor}(S^1, X),$$

wobei mor für $\mathrm{mor}_{\mathbf{Toph}_*}$ steht. Es ist nicht sehr schwer, zu zeigen, dass diese Abbildung immer eine Gruppenstruktur auf $\mathrm{mor}(S^1, X)$ ist. Undsoweiter. Die Gruppe $\mathrm{mor}(S^1, X)$ heisst (bekanntlich?) auch Fundamentalgruppe von X, Bezeichnung $\pi_1(X, x_0)$.

Beispiel 3.22. In Beispiel 3.13 haben wir auch gezeigt, dass das Objekt $R = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ von **CRng** eine Kogruppenstruktur hat. Denn indem wir $\mathrm{mor}_{\mathbf{CRng}}(R, -)$ in der Form $V \circ \mathrm{GL}_1$ beschrieben haben, haben wir genau die Art von Faktorisierung gefunden, die wir für eine Kogruppenstruktur brauchen. Ebenso haben wir in 3.14 gezeigt, dass das darstellende Objekt für $V \circ \mathrm{GL}_n$ eine Kogruppenstruktur hat.

Bemerkung 3.23. Sei c ein Objekt der Kategorie $\mathcal{D}$ und sei $F = \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(c, -)$. Wir schreiben $F \times F \colon \mathcal{D} \to \mathbf{Set}$ für den Funktor gegeben durch

$$d \mapsto F(d) \times F(d)$$

usw. Eine Kogruppen-Struktur auf c in $\mathcal{D}$ ist eigentlich dasselbe wie

- eine natürliche Transformation $\nu \colon F \times F \to F$
- die gewisse gute Eigenschaften hat: nämlich, für jedes d wird die Menge $F(d)$ mit der "Multiplikation" $\nu_d \colon F(d) \times F(d) \to F(d)$ zu einer Gruppe.

Wenn ausserdem $\mathcal{D}$ ein initiales Objekt und Koprodukte für je zwei beliebige Objekte besitzt, dann ist der Funktor $F \times F$ darstellbar. Ein darstellendes Objekt ist $c \sqcup c$. Die natürliche Transformation $\nu \colon F \times F \to F$ muss dann nach Korollar 3.18 einem Morphismus von c nach $c \sqcup c$ entsprechen.

Diese Aussagen oder Beziehungen werden mit Beispiel 3.21 ganz gut illustriert. (Ähnliche Aussagen kann man natürlich auch für Gruppenobjekte machen.)

4. Mehr Yoneda; Begriff Kolimes

Beispiel 4.1. Sei beispielsweise R ein Objekt in **CRng** mit Kogruppenstruktur. Was bedeutet das? Es bedeutet erstmal, dass R ein kommutativer Ring ist und dann, dass ein Ringhomomorphismus

$$\delta \colon R \longrightarrow R \otimes R$$

gegeben ist (genannt *Diagonale*) mit allerhand hübschen Eigenschaften. Diese hübschen Eigenschaften kann man unter Zuhilfenahme von weiteren (eigentlich redundanten) Daten so beschreiben:

- (*Assoziativität*) die Zusammensetzungen

$$R \xrightarrow{\delta} R \otimes R \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \delta} R \otimes (R \otimes R),$$

$$R \xrightarrow{\delta} R \otimes R \xrightarrow{\delta \otimes \mathrm{id}} (R \otimes R) \otimes R,$$

  stimmen überein;
- (*Ko-Einheit*) ausserdem ist gegeben ein Ringhomomorphismus $\eta \colon R \to \mathbb{Z}$ derart, dass

$$R \xrightarrow{\delta} R \otimes R \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \eta} R \otimes \mathbb{Z} \cong R$$

  sowie

$$R \xrightarrow{\delta} R \otimes R \xrightarrow{\eta \otimes \mathrm{id}} \mathbb{Z} \otimes R \cong R$$

  mit id_R übereinstimmen;

- (*Inverses*) ausserdem ist gegeben $\rho\colon R \to R$, ein Ringautomorphismus, derart, dass
$$R \xrightarrow{\delta} R \otimes R \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\rho} R \otimes R$$
sowie
$$R \xrightarrow{\delta} R \otimes R \xrightarrow{\rho\otimes\mathrm{id}} R \otimes R$$
übereinstimmen mit der Zusammensetzung von Ringhomomorphismen
$$R \xrightarrow{\eta} \mathbb{Z} \longrightarrow R \otimes R\,.$$

Diese Daten erlauben uns, auf jeder Morphismenmenge
$$\mathrm{mor}_{\mathbf{CRng}}(R, S) = \mathrm{mor}(R, S)$$
(für beliebigen kommutativen Ring S bei festem R) eine Gruppenstruktur einzuführen. Zum Beipiel ist die Multiplikation so definiert:
$$\mathrm{mor}(R, S) \times \mathrm{mor}(R, S) \cong \mathrm{mor}(R \otimes R, S) \xrightarrow{\circ\delta} \mathrm{mor}(R, S)$$
also durch Zusammensetzen mit δ auf der passenden Seite. Das neutrale Element von $\mathrm{mor}(R, S)$ ist die Zusammensetzung der Ringhomomorphismen
$$R \xrightarrow{\eta} \mathbb{Z} \longrightarrow S\,.$$
Die Abbildung *Inverses* von $\mathrm{mor}(R, S)$ nach $\mathrm{mor}(R, S)$ ist gegeben durch Zusammenzetzen mit ρ auf der passenden Seite, also $g \mapsto g \circ \rho$. Die Bedingungen an δ, η und ρ sollen sicher stellen, dass die Gruppeneigenschaften erfüllt sind. Allerdings sind η und ρ durch δ eindeutig bestimmt, wenn sie überhaupt existieren (nach dem Korollar zum Yoneda-Lemma).

Ein kommutativer Ring R mit so einer Zusatzstruktur (δ, η, ρ) heisst *Hopf-Algebra* oder *Hopf-Ring* (nach Heinz Hopf, der für diesen Begriff sehr schöne Anwendungen in der algebraischen Topologie fand).

Bemerkung 4.2. Noch eine Bemerkung zum Yoneda-Lemma. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Sicherheitshalber sollten wir vielleicht voraussetzen, dass sie klein ist. Wir machen daraus eine weitere Kategorie
$$\mathrm{fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set})$$
deren Objekte die kontravarianten Funktoren von $\mathcal{C}$ nach $\mathbf{Set}$ sind, mit natürlichen Transformationen zwischen solchen Funktoren als Morphismen. Dann gibt es einen *kovarianten* Funktor
$$Y\colon \mathcal{C} \to \mathrm{fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set})$$
(nach Yoneda benannt). Wie man sich denken kann, soll dieser ein Objekt c von $\mathcal{C}$ abbilden auf den Funktor $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-, c)$, Objekt von $\mathrm{fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set})$. Und ein Morphismus $g\colon c \to d$ wird abgebildet auf die natürliche Transformation
$$Y(g) : \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-, c) \Rightarrow \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-, d)$$
gegeben durch Zusammensetzen mit g; also für $f \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(b, c)$ ist
$$Y(g)(f) = g \circ f \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(b, d).$$

Das Korollar zum Yoneda-Lemma besagt, dass der Funktor Y voll treu ist. Anders ausgedrückt, man kann ganz gut so tun, als ob $\mathcal{C}$ eine volle Unterkategorie[4] von $\mathrm{fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set})$ ist. Noch genauer gesagt, weil wir das Vokabular nun schon haben, $\mathcal{C}$ ist tatsächlich äquivalent zu einer vollen Unterkategorie von $\mathrm{fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set})$. Das ist garnicht so schlecht, weil die Kategorie $\mathrm{fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set})$ ein paar gute Eigenschaften hat, die $\mathcal{C}$ nicht haben muss.

Jetzt soll es weitergehen zu den Begriffen *Limes* und *Kolimes*. Wir fangen an mit einem sehr klassischen Fall zur Illustration. Sei

$$A_0 \xrightarrow{f_0} A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3 \xrightarrow{f_3} \cdots$$

ein Diagramm von Mengen und Abbildungen wie angedeutet. Wir stellen uns die Aufgabe, eine Menge A_∞ zu konstruieren und Abbildungen $e_i\colon A_i \to A_\infty$ für $i = 0, 1, 2, \dots$ derart, dass $e_i \circ f_{i-1} = e_{i-1}$ für $i = 1, 2, \dots$, und zwar so, dass A_∞ eine gute Annäherung an A_i für grosses i darstellt. Es hat keinen Sinn, jetzt genauer zu erklären, was das heissen soll ... wir tun es einfach und erklären später.
Sei M die Menge aller Paare (i, a) wobei $i \in \{0, 1, \dots\}$ und $a \in A_i$. Wir führen eine Äquivalenzrelation R auf M ein wie folgt: $(i, a)R(j, b)$ wenn $k \geq i, j$ existiert derart, dass das Bild von a (unter der Zusammensetzung $f_{k-1} \circ \cdots \circ f_{i+1} \circ f_i$) in A_k gleich dem Bild von b in A_k ist. Das ist eine Äquivalenzrelation. Sei $A_\infty = M/R$ die Menge der Äquivalenzklassen. Wir definieren $e_i\colon A_i \to A_\infty$, indem wir $a \in A_i$ auf die Äquivalenzklasse von (i, a) abbilden. Es ist ziemlich klar, dass $e_i \circ f_{i-1} = e_{i-1}$ für $i = 1, 2, \dots$.
Jetzt darf gefragt werden, welches Problem wir damit eigentlich gelöst haben. Sei B igendeine Menge. Angenommen, wir haben Abbildungen $e'_i\colon A_i \to B$ für $i = 0, 1, 2, \dots$ derart, dass $e'_i \circ f_{i-1} = e'_{i-1}$ für $i = 1, 2, \dots$. Dann gibt es genau eine Abbildung $\varphi\colon A_\infty \to B$ derart, dass $e'_i = e_i \circ \varphi$; nämlich Äquivalenzklasse von (i, a) geht auf $e'_i(a) \in B$. Daran kann man erahnen, welches Problem wir hier gelöst haben.

Jezt die abstrakte Fassung. Sei $\mathcal{J}$ eine kleine Kategorie, $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie und $D\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ ein Funktor[5]. Für jedes Objekt b in $\mathcal{C}$ können wir einen konstanten Funktor

$$b_{\mathcal{J}}\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$$

[4]Eine Unterkategorie ist voll, wenn der Inklusionsfunktor voll ist.

[5]Wir schreiben D, weil wir an *Diagramm* denken. Wir schreiben $\mathcal{J}$, weil es besser aussieht als $\mathcal{I}$ und weil es uns noch genug an *Indizes* erinnert. Kurz, man soll sich denken, dass D ein Diagramm in $\mathcal{C}$ ist, indiziert durch $\mathcal{J}$. In unserem Beispiel oben war $\mathcal{J} = \mathbb{N}$, wobei $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ aufgefasst wird als geordnete Menge mit der üblichen Ordnung. Ausserdem war $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$. Ein Funktor $D\colon \mathbb{N} \to \mathbf{Set}$ ist gleichwertig zu einem Diagramm von Mengen und Abbbildungen

$$A_0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to \cdots.$$

Das ist vielleicht nicht so klar, wie es zuerst aussieht. In $\mathbb{N}$ gibt es ja zum Beispiel auch einen Morphismus, genau einen, von 3 nach 6. Warum sehen wir eigentlich keine Entsprechung dazu im Diagramm $A_0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to \cdots$? Naja, wir sehen sie eben doch bei genauerem Hingucken. Es ist die Zusammensetzung der drei Pfeile zwischen A_3 und A_6.

definieren. Dieser Funktor $b_{\mathcal{J}}$ schickt jedes Objekt von $\mathcal{J}$ auf b und jeden Morphismus in $\mathcal{J}$ auf id_b . Wir interessieren uns für natürliche Transformationen[6] von D nach $b_{\mathcal{J}}$. Sei

$$\mathrm{nat}(D, b_{\mathcal{J}})$$

die Menge dieser natürlichen Transformationen. (Weil $\mathcal{J}$ klein ist, dürfen wir sicher sein, dass es eine Menge ist.) Weil jeder Morphismus $f\colon b \to c$ in $\mathcal{C}$ eine natürliche Transformation $f_{\mathcal{J}}\colon b_{\mathcal{J}} \Rightarrow c_{\mathcal{J}}$ bestimmt (und das ist klar), wird die Regel

$$b \mapsto \mathrm{nat}(D, b_{\mathcal{J}})$$

zu einem kovarianten Funktor von $\mathcal{C}$ nach **Set**, denn ein Morphismus $f\colon b \to c$ bestimmt eine Abbildung von Mengen

$$\mathrm{nat}(D, b_{\mathcal{J}}) \to \mathrm{nat}(D, c_{\mathcal{J}})$$

durch Zusammensetzen von natürlichen Transformationen, $D \Rightarrow b_{\mathcal{J}}$ mit $f_{\mathcal{J}}\colon b_{\mathcal{J}} \Rightarrow c_{\mathcal{J}}$.

Definition 4.3. Wir sagen, dass $D\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ einen Kolimes (direkten Limes, induktiven Limes ...) besitzt, wenn dieser Funktor

$$b \mapsto \mathrm{nat}(D, b_{\mathcal{J}})$$

von $\mathcal{C}$ nach **Set** darstellbar ist. Genauer, wenn a ein darstellendes Objekt für diesen Funktor ist und $u \in \mathrm{nat}(D, a_{\mathcal{J}})$ ein dazu passendes universelles Element, dann schreiben wir

$$a = \mathrm{colim}\ D$$

und nennen die natürliche Transformation u von D nach $a_{\mathcal{J}}$ einen *universellen Kegel* ... oder ähnlich.

Wenn also $a = \mathrm{colim}\ D$ mit universellem Kegel $u\colon D \Rightarrow a_{\mathcal{J}}$, dann gibt es für jedes Objekt b in $\mathcal{C}$ ausgerüstet mit $v \in \mathrm{nat}(D, b_{\mathcal{J}})$ genau einen Morphismus $f_v\colon a \to b$ derart, dass $v = f_{\mathcal{J}} \circ u$ ist. So war eben die Definition von darstellendem Objekt mit universellem Element. Die Entsprechung

$$v \leftrightarrow f_v$$

ist eine *natürliche* Bijektion von $\mathrm{nat}(D, b_{\mathcal{J}})$ nach $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, b)$, womit die Darstellbarkeit von $b \mapsto \mathrm{nat}(D, b_{\mathcal{J}})$ ausgedrückt oder bestätigt wird.

Wir nennen eine natürliche Transformation v von D nach $b_{\mathcal{J}}$ manchmal auch einen *Kegel*[7].

---

[6] In unserem Beispiel oben hiess es B statt b, und $\mathbb{N}$ statt $\mathcal{J}$, also $B_{\mathbb{N}}$ statt $b_{\mathcal{J}}$. Dieses $B_{\mathbb{N}}$ ist das konstante Diagramm $B \to B \to B \to B \to \cdots$, in dem alle Pfeile Identitätsabbildungen sind. Eine natürliche Transformation vom Diagramm D alias

$$A_0 \to A_1 \to A_2 \to \cdots$$

nach $b_{\mathcal{J}}$ alias $B_{\mathbb{N}}$ alias $B \to B \to B \to \cdots$ ist genau dasselbe, wie eine Folge von Abbildungen $e'_i\colon A_i \to B$ mit der Eigenschaft $e'_i \circ f_{i-1} = e'_{i-1}$.

[7] Das Wort *Kegel* wird also benutzt für natürliche Transformationen von einem beliebigen Funktor in einen konstanten Funktor, oder auch für natürliche Transformationen von einem konstanten Funktor in einen beliebigen Funktor.

Der *Typ* von Kolimes, den wir in Definition 4.3 sehen, hängt von $\mathcal{J}$ ab. Der klassische Fall ist $\mathcal{J} = \mathbb{N}$, und der rechtfertigt auch besonders gut Ausdrücke wie *direkter Limes, induktiver Limes* undsoweiter. Es gibt aber andere Fälle, die genauso wichtig sind.

Beispiel 4.4. *Fall* $\mathcal{J} = \bullet\ \bullet$. Hier denken wir uns eine Kategorie $\mathcal{J}$ mit genau zwei Objekten genannt 1 und 2 , und keinen Morphismen ausser id_1 und id_2 , die wir zulassen müssen. Ein Funktor D von $\mathcal{J}$ nach $\mathcal{C}$ ist dann einfach eine Auswahl von zwei Objekten $D(1)$ und $D(2)$ in $\mathcal{C}$. Also ist

$$\mathrm{nat}(D, b_{\mathcal{J}}) = \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(D(1), b) \times \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(D(2), b).$$

Wir sollen jetzt fragen, ob dieser Funktor (von der Variablen b) darstellbar ist. Wenn a ein darstellendes Objekt mit universellem Kegel u ist, dann heisst das: $u = (u_1, u_2)$ mit $u_1 \in \mathrm{mor}(D(1), a)$ und $u_2 \in \mathrm{mor}(D(2), a)$, und für jedes Objekt b in $\mathcal{C}$ ausgerüstet mit

$$v = (v_1, v_2) \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(D(1), b) \times \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(D(2), b)$$

gibt es genau ein $f_v \colon a \to b$ mit $v_1 = f_v \circ u_1$ und $v_2 = f_v \circ u_2$. Wir sehen also, dass a genau die Eigenschaften von einem Koprodukt hat:

$$a = \mathrm{colim}\ D = D(1) \sqcup D(2),$$

mit den dazugehörigen Morphismen $u_1 \colon D(1) \to a$ und $u_2 \colon D(2) \to a$, die früher vielleicht j_1 und j_2 hiessen.

Beispiel 4.5. *Fall* $\mathcal{J} =$ *Menge.* Hier denken wir uns eine kleine Kategorie $\mathcal{J}$ mit Objektmenge S und keinen Morphismen ausser den Identitätsmorphismen id_s für $s \in S$. Ein Funktor D von $\mathcal{J}$ nach $\mathcal{C}$ ist dann einfach eine Familie von Objekten $D(s)$ in $\mathcal{C}$ indiziert durch $s \in S$. Dann ist

$$\mathrm{nat}(D, b_{\mathcal{J}}) = \prod_{s \in D} \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(D(s), b)\ .$$

Wenn a ein darstellendes Objekt dafür mit universellem Kegel u ist, dann heisst das $u = (u_s)_{s \in S}$ mit $u_s \in \mathrm{mor}(D(s), a)$, und für jedes Objekt b in $\mathcal{C}$ ausgerüstet mit

$$v = (v_s)_{s \in S} \in \prod_{s \in S} \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(D(s), b)$$

gibt es genau ein $f_v \colon a \to b$ mit $v_s = f \circ u_s$ für alle $s \in S$. Wir nennen a dann immer noch ein Koprodukt:

$$a = \mathrm{colim}\ D = \coprod_{s \in S} D(s),$$

mit den dazugehörigen Morphismen $u_s \colon D(s) \to a$ für $s \in S$.

Beispiel 4.6. *Fall* $\mathcal{J} = \bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet$. Hier denken wir uns eine Kategorie $\mathcal{J}$ mit genau drei Objekten genannt λ, ρ und μ , und keinen Morphismen ausser den Identitätsmorphismen und einem $f_\lambda \colon \mu \to \lambda$ und einem $f_\rho \colon \mu \to \rho$. Ein Funktor D von $\mathcal{J}$ nach $\mathcal{C}$ ist dann einfach ein Diagramm der Form

$$c_\lambda \xleftarrow{g_\lambda} c_\mu \xrightarrow{g_\rho} c_\rho$$

in $\mathcal{C}$, nämlich $c_\lambda = D(\lambda)$ undsoweiter. Ein Element von $\mathrm{nat}(D, b_{\mathcal{J}})$ kann man sich denken als ein *kommutatives* Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd}
c_\lambda \arrow[d] & c_\mu \arrow[l, "g_\lambda"'] \arrow[r, "g_\rho"] \arrow[d] & c_\rho \arrow[d] \\
b & b \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \arrow[r, "\mathrm{id}"] & b
\end{tikzcd}$$

wobei die obere Zeile eben D ist. Man kann das vereinfachen zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
c_\lambda \arrow[dr] & c_\mu \arrow[l, "g_\lambda"'] \arrow[r, "g_\rho"] \arrow[d] & c_\rho \arrow[dl] \\
& b &
\end{tikzcd}$$

womit der Name *Kegel* erklärt ist. Man kann das aber noch etwas mehr vereinfachen zu einem kommutativen Diagramm

$$(*) \qquad \begin{tikzcd}
& c_\mu \arrow[dl, "g_\lambda"'] \arrow[dr, "g_\rho"] & \\
c_\lambda \arrow[dr] & & c_\rho \arrow[dl] \\
& b &
\end{tikzcd}$$

Wenn also $a = \operatorname{colim} D$ existiert, dann haben wir damit ein besonderes (universelles) kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& c_\mu \arrow[dl, "g_\lambda"'] \arrow[dr, "g_\rho"] & \\
c_\lambda \arrow[dr, "u_\lambda"] & & c_\rho \arrow[dl, "u_\rho"'] \\
& a &
\end{tikzcd}$$

mit der Eigenschaft, dass jedes Diagramm wie $(*)$ sich aus diesem bauen lässt durch Zusammensetzen mit einem eindeutig durch $(*)$ bestimmten Morphismus $v\colon a \to b$. In diesem Fall sagt man auch: a ist das *Pushout* von D.

Beispiel 4.7. Hier denken wir uns eine Kategorie $\mathcal{J}$ mit zwei Objekten x, y und zwei Morphismen $f, g\colon x \to y$ (ausserdem natürlich id_x und id_y). Ein Funktor von $\mathcal{J}$ nach $\mathcal{C}$ ist dann dasselbe wie eine Auswahl von zwei Objekten a, b in $\mathcal{C}$ und zwei Morphismen $\varphi, \gamma\colon a \to b$. Eine natürliche Transformation u von so einem Funktor in einen konstanten Funktor $c_{\mathcal{J}}$ ist bestimmt durch den Morphismus $u_y\colon b \to c$ in $\mathcal{C}$. Der muss $u_y \circ \varphi = u_y \circ \gamma$ erfüllen, weiter nichts. Wenn c und u zusammen universell sind (universeller Kegel), dann bedeutet das, dass zu jedem Morphismus $k\colon b \to d$ mit der Eigenschaft $k \circ \varphi = k \circ \gamma$ genau ein $h\colon c \to d$ existiert mit der Eigenschaft $k = h \circ u_y$. Dann sagen wir, dass c der *Differenzencokern* (Coequalizer) von φ und γ ist.

Satz 4.8. *Jeder Funktor* $D\colon \mathcal{J} \to \mathbf{Set}$ *besitzt einen Kolimes.*

Beweis. Es wird immer noch angenommen, dass $\mathcal{J}$ eine kleine Kategorie ist. Sei

$$M = \coprod_{j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})} D(j)\,.$$

Wir schreiben Elemente von M als Paare (j,x) wobei $j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})$ und $x \in D(j)$. Sei R die kleinste Äquivalenzrelation auf M, bei der Paare (i,x) und (j,y) äquivalent sind, wenn es einen Morphismus $f\colon i \to j$ in $\mathcal{J}$ gibt mit $D(f)(x) = y$. Sei

$$S = M/R$$

die Menge der Äquivalenzklassen. Wir definieren eine natürliche Transformation

$$u\colon D \Rightarrow S_{\mathbf{Set}}$$

durch die Abbildungen $u_j\colon D(j) \to S$, die $x \in D(j)$ auf $[(j,x)]$ abbilden. (Natürlichkeit ist erfüllt, weil die Äquivalenzrelation genau das erzwingt.) Wenn jetzt T irgendeine Menge ist und $v\colon D \Rightarrow T_{\mathbf{Set}}$ eine natürliche Transformation, dann können wir eine Abbildung f_v von S nach T definieren durch

$$S \ni [(j,x)] \mapsto v_j(x) \in T\ .$$

Das ist wohldefiniert wegen der Äquivalenzrelation, und wir haben dann $v = f_v \circ u$ oder genauer $v = (f_v)_{\mathcal{J}} \circ u$. Ausserdem wird das f_v durch diese Gleichung eindeutig charakterisiert. □

5. Mehr zu Kolimes; Begriff Limes; adjungierte Funktoren

Diese Beweismethode führt zu einem allgemeineren Resultat.

Satz 5.1. *Sei* $\mathcal{C}$ *eine Kategorie, in der Differenzencokerne (Coequalizer) und Koprodukte über beliebige Indexmengen existieren. Dann besitzt jeder Funktor* $D\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ *einen Kolimes.*

Beweis. Sei

$$b = \coprod_{j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})} D(j)$$

$$a = \coprod_{i,j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J}),\ f\colon i \to j} D(i)$$

wobei das zweite Koprodukt sich über alle (i,j,f) mit $f \in \mathrm{mor}(i,j)$ erstreckt. Wir schreiben β und α für die universellen natürlichen Transformationen, die zu diesen Koprodukten gehören. Das heisst hier nur, dass wir ausgezeichnete Morphismen $\beta_i\colon D(i) \to b$ haben (für jedes Objekt i aus $\mathcal{J}$) und ausgezeichnete Morphismen $\alpha_{(i,j,f)}$ von $D(i)$ nach a. Wir haben zwei Morphismen

$$\varphi, \gamma\colon a \longrightarrow b$$

wie folgt: φ ist charakterisiert oder definiert durch

$$\varphi \circ \alpha_{(i,j,f)} = \beta_i$$

und γ ist charakterisiert oder definiert durch

$$\gamma \circ \alpha_{(i,j,f)} = \beta_j \circ D(f).$$

Jetzt wird behauptet, dass der Coequalizer c von $\varphi, \gamma \colon a \to b$ als Kolimes von D taugt. Um das zu zeigen, schauen wir uns den Funktor $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(c, -)$ an, also den Funktor, der durch c dargestellt wird. Weil c der Coequalizer von φ und γ ist, haben wir eine natürliche Bijektion

$$\mathrm{mor}(c, x) \longrightarrow \{g \in \mathrm{mor}(b, x) \mid g \circ \varphi = g \circ \gamma\}$$

(wobei x die Variable ist, ein Objekt in $\mathcal{C}$). Andererseits ist b so ein Koprodukt, also können wir $g \in \mathrm{mor}(b, x)$ schreiben als

$$(g_i)_{i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})}$$

wobei $g_i = g \circ \beta_i \in \mathrm{mor}(D(i), x)$. Die Bedingung $g \circ \varphi = g \circ \gamma$ lässt sich ebenso ersetzen durch die Bedingungen $g \circ \varphi \circ \alpha_{(i,j,f)} = g \circ \gamma \circ \alpha_{(i,j,f)}$, und das bedeutet

$$g_i = g \circ \beta_i = g \circ \varphi \circ \alpha_{(i,j,f)} = g \circ \gamma \circ \alpha_{(i,j,f)} = g \circ \beta_j \circ D(f) = g_j \circ D(f).$$

Damit ist genau ausgedrückt, dass die Morphismen $g_i \colon D(i) \to x$ zusammen einen Kegel bilden, eine natürliche Transformation von D nach $x_{\mathcal{J}}$. Das heisst, der Funktor, der durch c dargestellt wird, ist isomorph zum Funktor $x \mapsto \mathrm{nat}(D, x_{\mathcal{J}})$, wzbw. $\square$

Beispiel 5.2. In der Kategorie **Grp** (der Gruppen) existieren beliebige Koprodukte. Den Fall von Koprodukt von zwei Gruppen hatten wir schon ausführlich untersucht. Ausserdem existieren Coequalizer in **Grp**. Der Coequalizer von zwei Homomorphismen $f, g \colon G \to H$ ist die Faktorgruppe H/R, wobei R die kleinste normale Untergruppe von H ist, die alle Elemente der Form $f(x) \cdot g(x^{-1})$ für $x \in G$ enthält. Dazu gehört die Projektion $p \colon H \to H/R$ mit der Eigenschaft $p \circ f = p \circ g$.
Also existieren in **Grp** alle Kolimites.

Definition 5.3. Sei $F \colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ ein Funktor. Wir sagen, dass F Kolimites vom Typ $\mathcal{J}$ erhält, wenn für jeden Funktor $D \colon \mathcal{J} \to \mathcal{B}$ mit universellem Kegel $u \colon D \Rightarrow b_{\mathcal{J}}$ die natürliche Transformation

$$F(u) \colon F \circ D \Rightarrow F(b)_{\mathcal{J}}$$

wieder ein universeller Kegel ist.

Das war vielleicht etwas kurz, also hier nochmal wortreicher. Wir denken uns ein Diagramm D der Form $\mathcal{J}$ in $\mathcal{B}$, also einen Funktor $D \colon \mathcal{J} \to \mathcal{B}$. Wir denken uns, dass es einen Kolimes b hat. Das heisst, dass wir eine natürliche Transformation u von D in den konstanten Funktor $b_{\mathcal{J}}$ haben, die eine ganz besondere universelle Eigenschaft hat. Jetzt wenden wir F auf D und die Morphismen $u_j \colon D(j) \to b$ an. Wir erhalten Morphismen $F(u_j) \colon F(D(j)) \to F(b)$ in $\mathcal{C}$, also eine natürliche Transformation von $F \circ D$ in den konstanten Funktor $F(b)_{\mathcal{J}}$ von $\mathcal{J}$ nach $\mathcal{C}$. Es wird verlangt, dass diese wieder die ganz besondere universelle Eigenschaft hat.
Es wurde übrigens nicht verlangt, dass alle $D \colon \mathcal{J} \to \mathcal{B}$ einen Kolimes haben. Nur: wenn so ein D einen Kolimes hat, dann ... undsoweiter.

Beispiel 5.4. Der Vergissfunktor $V \colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ erhält im Allgemeinen nicht Koprodukte (von zwei Objekten). Koprodukte von zwei Objekten sind Kolimites vom Typ $\mathcal{J}$ wobei $\mathcal{J}$ zwei Objekte hat und nur die Identitätsmorphismen dazu.

Beispiel 5.5. Der Vergissfunktor $V\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ erhält alle Kolimites. Es genügt, wenn wir das nur für beliebige Koprodukte und Coequalizer überprüfen. (Denn beliebige Koprodukte und Coequalizer existieren in beiden Kategorien, und alle anderen Typen von Kolimites können auf diese beiden zurückgeführt werden wie im Beweis von Satz 5.1.)

Wir kommen jetzt zu Limites (projektiven Limites, inversen Limites). Dazu nehmen wir wieder an, dass $\mathcal{J}$ eine kleine Kategorie ist. Eine ganz faule Methode ist die folgende: Wir sagen, dass ein Funktor $D\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ einen Limes besitzt, wenn der entsprechende Funktor $D^{\mathrm{op}}\colon \mathcal{J}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ einen Kolimes besitzt ... und diesen Kolimes nennen wir dann den Limes von D. Das ist richtig, aber es schadet trotzdem nicht, eine direkte Definition von Limes auszuschreiben.

Definition 5.6. Sei $D\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ ein Funktor. Wir sagen, dass D einen Limes (inversen Limes, projektiven Limes ...) besitzt, wenn der *kontravariante* Funktor

$$b \mapsto \mathrm{nat}(b_{\mathcal{J}}, D)$$

von $\mathcal{C}$ nach $\mathbf{Set}$ darstellbar ist. Genauer, wenn a ein darstellendes Objekt für diesen Funktor ist und $u \in \mathrm{nat}(a_{\mathcal{J}}, D)$ ein dazu passendes universelles Element, dann schreiben wir

$$a = \lim\ D$$

und nennen die natürliche Transformation u von $a_{\mathcal{J}}$ nach D einen *universellen Kegel* ... oder ähnlich.

Beispiel 5.7. *Fall* $\mathcal{J} = \ \bullet\ \bullet$. Hier denken wir uns eine Kategorie $\mathcal{J}$ mit genau zwei Objekten genannt 1 und 2 , und keinen Morphismen ausser id_1 und id_2 , die wir zulassen müssen. Ein Funktor D von $\mathcal{J}$ nach $\mathcal{C}$ ist dann einfach eine Auswahl von zwei Objekten $D(1)$ und $D(2)$ in $\mathcal{C}$. Also ist

$$\mathrm{nat}(b_{\mathcal{J}}, D) = \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(b, D(1)) \times \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(b, D(2)).$$

Wir sollen jetzt fragen, ob dieser kontravariante Funktor (von der Variablen b) darstellbar ist. Wenn a ein darstellendes Objekt mit universellem Kegel u ist, dann heisst das: $u = (u_1, u_2)$ mit $u_1 \in \mathrm{mor}(a, D(1))$ und $u_2 \in \mathrm{mor}(a, D(2))$, und für jedes Objekt b in $\mathcal{C}$ ausgerüstet mit

$$v = (v_1, v_2) \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(b, D(1)) \times \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(b, D(2))$$

gibt es genau ein $f_v\colon b \to a$ mit $v_1 = u_1 \circ f_v$ und $v_2 = u_2 \circ f_v$. Wir sehen also, dass a genau die Eigenschaften von einem Produkt hat:

$$a = \lim\ D = D(1) \times D(2),$$

mit den dazugehörigen Morphismen $u_1\colon a \to D(1)$ und $u_2\colon a \to D(2)$, die früher vielleicht p_1 und p_2 hiessen.

Beispiel 5.8. *Fall* $\mathcal{J}$ = *Menge.* Hier denken wir uns eine kleine Kategorie $\mathcal{J}$ mit Objektmenge S und keinen Morphismen ausser den Identitätsmorphismen id_s für $s \in S$. Ein Funktor D von $\mathcal{J}$ nach $\mathcal{C}$ ist dann einfach eine Familie von Objekten $D(s)$ in $\mathcal{C}$ indiziert durch $s \in S$. Dann ist

$$\mathrm{nat}(b_{\mathcal{J}}, D) = \prod_{s \in D} \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(b, D(s)) \ .$$

Wenn a ein darstellendes Objekt dafür mit universellem Kegel u ist, dann heisst das $u = (u_s)_{s \in S}$ mit $u_s \in \mathrm{mor}(a, D(s))$, und für jedes Objekt b in $\mathcal{C}$ ausgerüstet mit

$$v = (v_s)_{s \in S} \in \prod_{s \in S} \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(b, D(s))$$

gibt es genau ein $f_v \colon a \to b$ mit $v_s = u_s \circ f_v$ für alle $s \in S$. Wir nennen a dann immer noch ein Produkt:

$$a = \lim\ D = \prod_{s \in S} D(s),$$

mit den dazugehörigen Morphismen $u_s \colon a \to D(s)$ für $s \in S$.

Beispiel 5.9. *Fall* $\mathcal{J} = \ \bullet \to \bullet \leftarrow \bullet$. Hier denken wir uns eine Kategorie $\mathcal{J}$ mit genau drei Objekten genannt λ, ρ und μ , und keinen Morphismen ausser den Identitätsmorphismen und einem $f_\lambda \colon \lambda \to \mu$ und einem $f_\rho \colon \rho \to \mu$. Ein Funktor D von $\mathcal{J}$ nach $\mathcal{C}$ ist dann einfach ein Diagramm der Form

$$c_\lambda \xrightarrow{g_\lambda} c_\mu \xleftarrow{g_\rho} c_\rho$$

in $\mathcal{C}$, nämlich $c_\lambda = D(\lambda)$ undsoweiter. Ein Element von $\mathrm{nat}(b_{\mathcal{J}}, D)$ kann man sich denken (nach Vereinfachung) als ein kommutatives Quadrat

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} & c_\mu & \\ c_\lambda \arrow[ur, "g_\lambda"] & & c_\rho \arrow[ul, "g_\rho"'] \\ & b \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Wenn also $a = \lim\ D$ existiert, dann haben wir damit ein besonderes (universelles) kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} & c_\mu & \\ c_\lambda \arrow[ur, "g_\lambda"] & & c_\rho \arrow[ul, "g_\rho"'] \\ & a \arrow[ul, "u_\lambda"] \arrow[ur, "u_\rho"'] & \end{tikzcd}$$

mit der Eigenschaft, dass jedes Diagramm wie $(*)$ sich aus diesem bauen lässt durch Zusammensetzen mit einem eindeutig durch $(*)$ bestimmten Morphismus $v \colon b \to a$. In diesem Fall sagt man auch: a ist das *Pullback* von D.

Beispiel 5.10. Hier denken wir uns eine Kategorie $\mathcal{J}$ mit zwei Objekten x, y und zwei Morphismen $f, g \colon x \to y$ (ausserdem natürlich id_x und id_y). Ein Funktor von $\mathcal{J}$ nach $\mathcal{C}$ ist dann dasselbe wie eine Auswahl von zwei Objekten a, b in $\mathcal{C}$ und zwei Morphismen $\varphi, \gamma \colon a \to b$. Eine natürliche Transformation u von einem konstanten Funktor $c_{\mathcal{J}}$ in so einen Funktor ist bestimmt durch den Morphismus $u_x \colon c \to a$ in $\mathcal{C}$. Der muss $\varphi \circ u_x =$

$\gamma \circ u_x$ erfüllen, weiter nichts. Wenn c und u zusammen universell sind (universeller Kegel), dann bedeutet das, dass zu jedem Morphismus $k \colon d \to a$ mit der Eigenschaft $\varphi \circ k = \gamma \circ k$ genau ein $h \colon d \to c$ existiert mit der Eigenschaft $k = u_x \circ h$. Dann sagen wir, dass dass c der *Differenzenkern* (Equalizer) von φ und γ ist.

Satz 5.11. *Jeder Funktor $D \colon \mathcal{J} \to \mathbf{Set}$ besitzt einen Limes.*

Beweis. Es wird immer noch angenommen, dass $\mathcal{J}$ eine kleine Kategorie ist. Sei

$$M = \prod_{j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})} D(j)\,.$$

Wir schreiben Elemente von M als Familien $(x_j)_{j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})}$. Sei S die Teilmenge von M bestehend aus den Elementen $x = (x_j)$, die

$$D(f)(x_i) = x_j$$

erfüllen für jeden Morphismus $f \colon i \to j$ in $\mathcal{J}$. Wir definieren eine natürliche Transformation

$$u \colon S_{\mathbf{Set}} \longrightarrow D$$

durch die Abbildungen $u_j \colon S \to D(j)$, die $x \in S$ auf $x_j \in D(j)$ abbilden. Wenn jetzt T irgendeine Menge ist und $v \colon T_{\mathbf{Set}} \to D$ eine natürliche Transformation, dann können wir eine Abbildung f_v von T nach S definieren durch

$$T \ni t \mapsto (v_j(t))_{j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})} \in S\ .$$

Wir haben dann $v = u \circ f_v$ oder genauer $v = u \circ (f_v)_{\mathcal{J}}$. Ausserdem wird das f_v durch diese Gleichung eindeutig charakterisiert. □

Diese Beweismethode führt zu einem allgemeineren Resultat.

Satz 5.12. *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, in der Differenzenkerne (Equalizer) und Produkte über beliebige Indexmengen existieren. Dann besitzt jeder Funktor $D \colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ einen Limes.*

Beweis. Sei

$$a = \prod_{j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})} D(j)$$

$$b = \prod_{i,j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J}),\ f \colon i \to j} D(j)$$

wobei das zweite Produkt sich über alle (i, j, f) mit $f \in \mathrm{mor}(i, j)$ erstreckt. Wir schreiben α und β für die universellen natürlichen Transformationen, die zu diesen Produkten gehören. Das heisst hier nur, dass wir ausgezeichnete Morphismen $\alpha_i \colon a \to D(i)$ haben (für jedes Objekt i aus $\mathcal{J}$) und ausgezeichnete Morphismen $\beta_{(i,j,f)}$ von b nach $D(j)$. Wir haben zwei Morphismen

$$\varphi, \gamma \colon a \longrightarrow b$$

wie folgt: φ ist charakterisiert oder definiert durch

$$\beta_{(i,j,f)} \circ \varphi = \alpha_j$$

und γ ist charakterisiert oder definiert durch

$$\beta_{(i,j,f)} \circ \gamma = D(f) \circ \alpha_i\ .$$

Jetzt wird behauptet, dass der Equalizer c von φ und γ als Limes von D taugt. Denn für x in $\mathcal{C}$ ist

$$\mathrm{mor}(x,c) = \{g \in \mathrm{mor}(x,a) \mid \varphi \circ g = \gamma \circ g\}$$

und die Bedingung $\varphi \circ g = \gamma \circ g$ ist gleichwertig zu

$$\beta_{(i,j,f)} \circ \varphi \circ g = \beta_{(i,j,f)} \circ \gamma \circ g$$

für alle (i,j,f), also

$$\alpha_j \circ g = D(f) \circ \alpha_i \circ g$$

wofür man auch $g_j = D(f) \circ g_i$ schreiben kann. Das bedeutet genau, dass die $g_j : x \to D(j)$ einen Kegel (natürliche Transformation von einem konstanten Funktor nach D) bilden. Also stellt c den Funktor $x \mapsto \mathrm{nat}(x_{\mathcal{J}}, D)$ dar, wzbw. □

Bemerkung 5.13. Der Limes von einem Funktor $D\colon \mathcal{J} \to \mathbf{Set}$ kann auch beschrieben werden als die Menge der natürlichen Transformationen von $1_{\mathcal{J}}$ nach D, wobei 1 ein terminales Objekt in **Set** bezeichnet (also eine Menge mit genau einem Element). Der Beweis ist kurz:

$$\mathrm{nat}(1_{\mathcal{J}}, D) \cong \mathrm{mor}(1, \lim\ D) \cong \lim\ D \qquad \square$$

Die Bijektion links kommt von der universellen Eigenschaft von $\lim\ D$. Die Bijektion rechts haben wir, weil wir sogar für jede Menge S eine Bijektion von S nach $\mathrm{mor}_{\mathbf{Set}}(1,S)$ haben.

Definition 5.14. Sei $F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ ein Funktor. Wir sagen, dass F Limites vom Typ $\mathcal{J}$ erhält, wenn für jeden Funktor $D\colon \mathcal{J} \to \mathcal{B}$ mit universellem Kegel $u\colon b_{\mathcal{J}} \Rightarrow D$ die natürliche Transformation

$$F(u)\colon F(b)_{\mathcal{J}} \Rightarrow F \circ D$$

wieder ein universeller Kegel ist.

Beispiel 5.15. Der Vergissfunktor $V\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ erhält alle Limites. Dafür genügt es, zu zeigen, dass er Differenzenkerne (Equalizer) und Produkte über beliebige Indexmengen erhält.

Beispiel 5.16. Sei $\mathcal{C}$ irgendeine Kategorie und $\mathcal{E}$ die Kategorie der Funktoren von $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ nach **Set**. Es ist leicht zu sehen, dass $\mathcal{E}$ alle Limites hat. Denn wenn $D\colon \mathcal{J} \to \mathcal{E}$ irgendein Funktor ist, dann können wir $\lim\ D$ beschreiben als das Objekt von $\mathcal{E}$ gegeben durch den kontravarianten Funktor

$$c \mapsto \lim\ (\mathrm{ev}_c \circ D)$$

wobei c ein Objekt von $\mathcal{C}$ sein soll und $\mathrm{ev}_c\colon \mathcal{E} \to \mathbf{Set}$ die Auswertung bei c bedeutet (ein kovarianter Funktor von $\mathcal{E}$ nach **Set**).
Der Yoneda-Funktor $Y\colon \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ (gegeben durch $c \mapsto \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-,c)$ für Objekte c) erhält alle Limites. Das ist eigentlich eine Tautologie, im Hinblick auf die Definition von Limes. Zusammenfassend: Y ist voll treu, erhält alle Limites, und die Zielkategorie $\mathcal{E}$ von Y hat alle Limites.
Diese Bemerkungen lassen sich auch dualisieren. Warscheinlich die beste Methode: im

Obenstehenden setze man $\mathcal{C} = \mathcal{B}^{\mathrm{op}}$. Dann wird $\mathcal{E}$ die Kategorie der kovarianten Funktoren von $\mathcal{B}$ nach **Set**. Wie vorher sehen wir, dass $\mathcal{E}$ alle Limites hat (hier der Versuchung widerstehen, etwas Schönes über *Kolimites* in $\mathcal{E}$ zu sagen). Der Yoneda-Funktor $Y\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{E}$ erhält alle Limites. Anders ausgedrückt, und etwas schlampig,

$$Y(\mathrm{colim}\ D) \cong \lim\ Y \circ D$$

wenn $D\colon \mathcal{J} \to \mathcal{B}$ einen Kolimes in $\mathcal{B}$ besitzt (den wir auch als Limes von $D^{\mathrm{op}}\colon \mathcal{J}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{B}^{\mathrm{op}}$ betrachten dürfen). Das ist eigentlich wieder eine Tautologie, im Hinblick auf die Definition von Kolimes. Immerhin ist es bemerkenswert, dass wir die Definition von Limites *und* Kolimites in allgemeinen Kategorien über eine uns quasi angeborene Definition von Limites (nicht Kolimites) in der Kategorie der Mengen gegeben haben.

Bemerkung 5.17. Sei $\mathcal{J}$ die leere Kategorie (keine Objekte) und $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie. Dann gibt es genau einen Funktor D von $\mathcal{J}$ nach $\mathcal{C}$. Für jedes Objekt b in $\mathcal{C}$ hat $\mathrm{nat}(D, b_{\mathcal{J}})$ genau ein Element (und nebenbei, $b_{\mathcal{J}} = D$). Also ist der Funktor $c \mapsto \mathrm{nat}(D, c_{\mathcal{J}})$ genau dann darstellbar, wenn $\mathcal{C}$ ein initiales Objekt besitzt. In diesem Fall ist colim D das initiale Objekt von $\mathcal{C}$.
Ähnlich: der Funktor $D\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ wie oben hat genau dann einen Limes, wenn $\mathcal{C}$ ein terminales Objekt hat, und in dem Fall ist lim D das terminale Objekt.
Daran sollte man unbedingt denken, wenn irgendwo vorausgesetzt wird, dass $\mathcal{C}$ alle Limites oder Kolimites hat.

Bemerkung 5.18. Gegeben eine kleine Kategorie $\mathcal{J}$ und eine beliebige Kategorie $\mathcal{C}$. Wenn wir uns erlauben, $\mathcal{J}$ durch $\mathcal{J}^{\mathrm{op}}$ und $\mathcal{C}$ durch $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ zu ersetzen nach Wunsch, wieviele verschiedene Limes- und Kolimes-Formen können wir dann herstellen? Die richtige Antwort auf diese schlecht formulierte Frage sollte vier sein.

- Ein Funktor $D\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ kann auch als Funktor $D'\colon \mathcal{J}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ aufgefasst werden; colim D ist dann dasselbe wie lim D', und $\lim D$ ist dasselbe wie colim D'.
- Ein Funktor $D\colon \mathcal{J}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ kann auch als Funktor $D'\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ aufgefasst werden; colim D ist dann dasselbe wie lim D', und $\lim D$ ist dasselbe wie colimD'.

Jedenfalls ist es wichtig, zu verstehen, dass diese vier Formen grundsätzlich erlaubt sind. Allerdings kann der Ur-Fall $\mathcal{J} = \mathbb{N}$ (geordnete Menge $\mathbb{N}$ mit der üblichen Ordnung, aufgefasst als Kategorie) und $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$ zu der falschen Einstellung verleiten, dass da etwas verboten ist. Ein Funktor $\mathbb{N} \to \mathbf{Set}$ ist ein Diagramm

$$A_0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to \cdots$$

von Mengen und Abbildungen. Es ist erlaubt, davon den colim zu bilden, und das ist interessant, wie wir schon gesehen haben. Es ist *nicht* verboten, davon den lim zu bilden. Aber es ist nicht sehr interessant, denn der lim davon kann mit der Menge A_0 gleichgesetzt werden. Ebenso: ein Funktor $\mathbb{N}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ ist ein Diagramm

$$A_0 \leftarrow A_1 \leftarrow A_2 \to A_3 \leftarrow \cdots$$

von Mengen und Abbildungen. Es ist erlaubt, davon den lim zu bilden, und das ist sehr interessant. Es ist *nicht* verboten, davon den colim zu bilden. Aber das ist nicht sehr interessant, denn der colim davon kann mit der Menge A_0 gleichgesetzt werden.

Neues Thema: adjungierte Funktoren. Wir stellen uns zwei Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ vor und Funktoren $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Wir bilden das Produkt von $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ und $\mathcal{D}$, also eine Kategorie $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D}$ mit Objekten (x, y) wobei x Objekt von $\mathcal{C}$ und y Objekt von $\mathcal{D}$, und

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{D}}((x_0, y_0), (x_1, y_1)) := \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(x_1, x_0) \times \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(y_0, y_1)$$

undsoweiter. Dann können wir

$$(x, y) \mapsto \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(F(x), y)$$

als einen Funktor von $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D}$ nach **Set** betrachten, und ebenso

$$(x, y) \mapsto \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(x, G(y)).$$

Definition 5.19. Man sagt, dass F linksadjungiert zu G ist (oder auch, dass G rechtsadjungiert zu F ist), wenn es eine natürliche Bijektion

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(F(x), y) \longrightarrow \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(x, G(y))$$

gibt, wobei $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und $y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$. [Diese natürliche Bijektion ist aufzufassen als eine natürlicher Isomorphismus zwischen zwei Funktoren von $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D}$ nach **Set**.]
Genauer: eine Adjunktion ... besteht aus $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ sowie einer natürlichen Transformation φ von $(x, y) \mapsto \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(F(x), y)$ nach $(x, y) \mapsto \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(x, G(y))$. Man schreibt dafür manchmal

$$F\colon \mathcal{C} \leftrightharpoons \mathcal{D}\colon G$$

oder ähnlich. Es ist dabei wichtig, dass F auf der linken Seite und G auf der rechten steht, nicht umgekehrt. (Aber wir können auch schreiben $G\colon \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \leftrightharpoons \mathcal{C}^{\mathrm{op}}\colon F$, indem wir F als Funktor von $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ nach $\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ und G als Funktor von $\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ nach $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ auffassen.)

Beispiel 5.20. Wir nehmen $\mathcal{C} = \mathcal{D} = \mathbf{abGrp}$. Sei B eine feste abelsche Gruppe. Setze $F(X) = X \otimes B$ und $G(Y) = \hom(B, Y)$. Dann sind F und G Funktoren von **abGrp** nach **abGrp**, und F ist linksadjungiert zu G. Denn es gibt eine natürliche Bijektion von

$$\mathrm{mor}_{\mathbf{abGrp}}(F(X), Y) = \hom(X \otimes B, Y)$$

nach

$$\mathrm{mor}_{\mathbf{abGrp}}(X, G(Y)) = \hom(X, \hom(B, Y)) \ .$$

Beispiel 5.21. Der Vergissfunktor $V\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ hat einen Linksadjungierten

$$F\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Top}.$$

Das ist der Funktor, der jeder Menge S den topologischen Raum bestehend aus S und der diskreten Topologie zuordnet (alle Teilmengen von S werden als offen deklariert). Derselbe Vergissfunktor V hat auch einen Rechtsadjungierten $G\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Top}$. Das ist der Funktor, der jeder Menge S den topologischen Raum bestehend aus S und der indiskreten Topologie zuordnet (nur die leere Menge und S selbst sind offen).

Beispiel 5.22. *Metrische Räume und Vervollständigung.* Eine Kategorie **Met** der metrischen Räume kann man etwa so definieren. Objekte sind metrische Räume (X, d). Die Morphismen von (X, d_1) nach (Y, d_2) sind Abbildungen $f\colon X \to Y$ mit der Eigenschaft

$$d_2(f(x_1), f(x_2)) \leq d_1(x_1, x_2)$$

für alle $x_1, x_2 \in X$. Sei **cpMet** die volle Unterkategorie von **Met** bestehend aus den *vollständigen* metrischen Räumen. (Zur Erinnerung: ein metrischer Raum (X, d) ist vollständig, wenn jede Cauchy-Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ in X gegen ein Element von X konvergiert. Zum Beispiel ist $\mathbb{Q}$ mit der üblichen Metrik $d(x,y) = |x-y|$ bekanntermassen nicht vollständig. Dagegen ist $\mathbb{R}$ mit der üblichen Metrik $d(x,y) = |x-y|$ bekanntermassen vollständig.) Das heisst, wir lassen als Objekte von **cpMet** nur die vollständigen metrischen Räume zu; zwischen solchen sind alle Morphismen zugelassen, die wir in **Met** zugelassen haben. Sei jetzt

$$G\colon \mathbf{cpMet} \to \mathbf{Met}$$

der Inklusionsfunktor. Es wird behauptet, dass dieser Funktor einen Linksadjungierten besitzt. Dieser Linksadjungierte F heisst *Vervollständigung.* Damit soll gesagt sein, erstens: Vervollständigung F ist ein Funktor. Das heisst, ein Morphismus $f\colon (X, d_1) \to (Y, d_2)$ zwischen metrischen Räumen, in **Met**, bestimmt einen Morphismus

$$F(X, d_1) \to F(Y, d_2)$$

zwischen den vervollständigten Räumen ... undsoweiter. Zweitens, wenn (Y, d_2) schon vollständig ist, dann gibt es eine natürliche Bijektion

$$\mathrm{mor}_{\mathbf{Met}}((X, d_1), (Y, d_2)) \cong \mathrm{mor}_{\mathbf{Met}}(F(X, d_1), (Y, d_2))$$

weil sich jeder Morphismus $(X, d_1) \to (Y, d_2)$ eindeutig auf die Vervollständigung $F(X, d_1)$ fortsetzen lässt. Diese Bijektion kann man auch in der Form

$$\mathrm{mor}_{\mathbf{Met}}((X, d_1), G(Y, d_2)) \cong \mathrm{mor}_{\mathbf{cpMet}}(F(X, d_1), (Y, d_2))$$

schreiben, damit es formal nach Adjunktion aussieht.

Proposition 5.23. Eindeutigkeit von Adjungierten. *Wenn $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zwei Rechtsadjungierte $G_1, G_2\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ hat, dann sind G_1 und G_2 natürlich isomorph. Ebenso: wenn $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ zwei Linksadjungierte $F_1, F_2\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ hat, dann sind F_1 und F_2 natürlich isomorph.*

Beweis. Fall F mit zwei Rechtsadjungierten G_1 und G_2: für ein Objekt y von $\mathcal{D}$ und ein Objekt x von $\mathcal{C}$ haben wir eine Bijektion

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(x, G_1(y)) \cong \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(F(x), y) \cong \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(x, G_2(y)).$$

Sie ist natürlich in den Variablen x und y. Natürlichkeit in x bei festem y hat zur Folge, dass wir einen natürlichen Isomorphismus τ_y von darstellbaren/dargestellten Funktoren

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-, G_1(y)) \cong \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-, G_2(y))$$

haben. Wegen Yoneda-Lemma wissen wir, dass τ_y einen Isomorphismus

$$\sigma_y\colon G_1(y) \to G_2(y)$$

in $\mathcal{C}$ bestimmt und von diesem induziert wird. Jetzt haben wir immer noch Natürlichkeit in der Variablen y ... also $\sigma\colon G_1 \Rightarrow G_2$ ist ein natürlicher Isomorphismus.
Das Argument zeigt übrigens: wenn wir Adjunktionen $F \leftrightharpoons G_1$ und $F \leftrightharpoons G_2$ haben, dann gibt es einen eindeutigen natürlichen Isomorphismus $\alpha\colon G_1 \Rightarrow G_2$, so dass die Zusammensetzung

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(x, G_1(y)) \cong \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(F(x), y) \cong \mathrm{mor}_{s\mathcal{C}}(x, G_2(y))$$

mit der Abbildung $f \mapsto \alpha_y \circ f$ übereinstimmt (für beliebige x und y), wobei $f\colon x \to G_1(y)$ und $\alpha_y\colon G_1(y) \to G_2(y)$. — Der Beweis für den Fall G mit zwei Linksadjungierten lässt sich auf den vorigen Fall zurückführen durch Umdrehen aller Pfeile. □

Bemerkung 5.24. Dieser Beweis deutet noch etwas anderes an: ein Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ besitzt genau dann einen Rechtsadjungierten, wenn für jedes Objekt y aus $\mathcal{D}$ der Funktor

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(F(-), y)$$

von $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ nach **Set** darstellbar ist. Denn wenn ein rechtsadjungierter $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ existiert, dann ist $G(y)$ darstellendes Objekt für diesen Funktor: $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(F(-), y) \cong \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(-, G(y))$. Umgekehrt, wenn der Funktor $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(F(-), y)$ für jedes y aus $\mathcal{D}$ darstellbar ist, dann können wir ein darstellendes Objekt wählen und es $G(y)$ nennen, mit natürlichem Isomorphismus

$$\tau_y\colon \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(F(-), y) \to \mathrm{mor}(-, G(y)).$$

Jeder Morphismus $g\colon y_0 \to y_1$ in $\mathcal{D}$ bestimmt eine natürliche Transformation

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(F(-), y_0) \Rightarrow \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(F(-), y_1)$$

durch Zusammensetzen mit g, und daher nach Yoneda einen Morphismus $G(y_0) \to G(y_1)$ zwischen den darstellenden Objekten. Auf diese Weise wird G ein Funktor. Die τ_y zusammengenommen bilden die Adjunktion von F und G.
Eine analoge Aussage gibt es für Existenz von Linksadjungierten: ein Funktor $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ besitzt genau dann einen Linksadjungierten, wenn für jedes Objekt x aus $\mathcal{C}$ der Funktor $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(x, G(-))$ von $\mathcal{D}$ nach **Set** darstellbar ist.
Etwas problematisch bei dieser Argumentation: es wird ein Auswahlaxiom in sehr optimistischer Form angewandt. Für diese Aussage sollte man also besser annehmen, dass $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ kleine Kategorien sind.

Beispiel 5.25. Gegeben kleine Kategorie $\mathcal{J}$ und Kategorie $\mathcal{C}$. Wir nehmen an, dass jeder Funktor $D\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ einen Limes hat. Dann hat der Funktor $\mathcal{C} \to \mathrm{fun}(\mathcal{J}, \mathcal{C})$ gegeben durch $x \mapsto x_{\mathcal{J}}$ einen Rechtsadjungierten; er heisst

$$\lim\colon \mathrm{fun}(\mathcal{J}, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}\ .$$

Ähnlich für colim ...

Proposition 5.26. *Ein Linksadjungierter erhält Kolimites; ein Rechtsadjungierter erhält Limites. Genauer: gegeben Funktoren $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ wie oben, F linksadjungiert zu G. Dann erhält F Kolimites und G erhält Limites.*

Beweis. Für F und Kolimites: Gegeben sei kleine Kategorie $\mathcal{J}$ und Funktor $E\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ mit $c = \mathrm{colim}\ E$ und universellem Kegel

$$u\colon E \Rightarrow c_{\mathcal{J}}\ .$$

Dann haben wir natürliche Bijektionen

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(F(c), x) \cong \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(c, G(x)) \cong \mathrm{nat}(E, G(x)_{\mathcal{J}}) \cong \mathrm{nat}(F \circ E, x_{\mathcal{J}})$$

mit der Variablen x aus $\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$; das heisst, das Objekt $F(c)$ stellt den Funktor

$$x \mapsto \mathrm{nat}(F \circ E, x_{\mathcal{J}})$$

dar. Um das universelle Element dafür zu sehen, muss man herausfinden, was unter der zusammengesetzten Bijektion (von ganz links nach ganz rechts) dem Element id_x entspricht, wenn $x = F(c)$. Das ist $F(u) \in \mathrm{nat}(F \circ E, F(c)_{\mathcal{J}})$. (Siehe Nachtrag, Bemerkung 5.28.) Kurz zusammengefasst, $F(c)$ stellt den Funktor $x \mapsto \mathrm{nat}(F \circ E, x_{\mathcal{J}})$ dar mit universellem Element $F(u) \in \mathrm{nat}(F \circ E, F(c)_{\mathcal{J}})$. Genau das war zu beweisen. — Der Beweis für G und Limites lässt sich auf den für Kolimites zurückführen durch Umdrehen der Pfeile. □

Beispiel 5.27. Der Vergissfunktor $V\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ hat einen Linksadjungierten

$$F\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Grp}$$

wie schon bemerkt. Also muss F Kolimites erhalten, und das haben wir in Spezialfällen auch schon bemerkt; und V muss Limites erhalten, und das haben wir wohl auch schon bemerkt. Andererseits haben wir bemerkt, dass V Koprodukte (Spezialfall von Kolimites) in den meisten Fällen nicht erhält. Also kann V keinen Rechtsadjungierten besitzen.

Bemerkung 5.28. Noch zum Beweis von Proposition 5.26: Es ist besser, gleich zu sagen, dass die Adjunktion uns ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(F(c), x) \arrow[r, "\circ F(u)"] \arrow[d, "\text{Adjk.}"] & \mathrm{nat}(F \circ E, x_{\mathcal{J}}) \arrow[d, "\text{Adjk.}"] \\
\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(c, G(x)) \arrow[r, "\circ u"] & \mathrm{nat}(E, G(x)_{\mathcal{J}})
\end{tikzcd}$$

gibt. Damit ist nur gesagt, dass für jedes Objekt z in $\mathcal{J}$ (mit u_z von $E(z)$ nach c) und beliebiges $g \in \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(F(c), x)$ gilt:

$$(g \circ F(u_z))^{\mathrm{ad}} = g^{\mathrm{ad}} \circ u_z \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(E(z), G(x)).$$

Das kommt von der Natürlichkeit der Adjunktion. Dabei ist $F(u_z)\colon F(E(z)) \to F(c)$, also $g \circ F(u_z)\colon F(E(z)) \to x$, und ausserdem $g^{\mathrm{ad}}\colon c \to G(x)$, also $g^{\mathrm{ad}} \circ u_z\colon E(z) \to G(x)$.

6. Adjunktionen, Einheiten und Ko-Einheiten

Wenn Funktoren $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ adjungiert sind durch eine natürliche Bijektion

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(F(x), y) \longrightarrow \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(x, G(y)),$$

dann wird damit auch eine natürliche Transformation

$$\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow G \circ F$$

definiert (zwischen Funktoren von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{C}$). Etwas mechanisch kann man sich das so denken: für x in $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ haben wir den Morphismus $\mathrm{id}_{F(x)} \in \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(F(x), F(x))$, der unter der Adjunktion einem Element $\eta_x \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(x, G(F(x)))$ entspricht.
Besser ist es, gleich an Darstellbarkeit zu denken. Das Element $\mathrm{id}_{F(x)} \in \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(F(x), F(x))$ ist universell für den darstellbaren oder geradezu dargestellten Funktor $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(F(x), -)$ von $\mathcal{D}$ nach $\mathbf{Set}$. Dieser ist aber wegen Adjunktion isomorph zum Funktor

$$M_x := \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(x, G(-))$$

der deswegen auch darstellbar ist mit darstellendem Objekt $F(x)$ und universellem Element

$$\eta_x \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(x, G(F(x))) \ .$$

Die Universalität von η_x bedeutet, dass jedes Element w von $M_x(y)$ sich schreiben lässt als $w = M_x(v)(\eta_x)$ mit eindeutigem $v\colon F(x) \to y$. Und $w = M_x(v)(\eta_x)$ bedeutet, dass w mit der Zusammensetzung

$$x \xrightarrow{\eta_x} G(F(x)) \xrightarrow{G(v)} G(y)$$

übereinstimmt. Dabei ist v das, was w entspricht unter der Bijektion von $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(F(x), y)$ nach $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(x, G(y))$, also der zu w adjungierte Morphismus. Wir sehen jetzt besser, wozu die Adjunktion gut ist.
Um die Natürlichkeit von η_x zu zeigen, fangen wir am besten mit einer allgemeineren Beobachtung an. Gegeben sei ein kommutatives Diagramm in $\mathcal{D}$ von der Form

$$\begin{tikzcd} F(x_0) \arrow[r, "F(e)"] \arrow[d, "g"] & F(x_1) \arrow[d, "h"] \\ y_0 \arrow[r, "k"] & y_1 \end{tikzcd}$$

wobei $e\colon x_0 \to x_1$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$ ist. Dann ist auch

$$\begin{tikzcd} x_0 \arrow[r, "e"] \arrow[d, "g^{\mathrm{ad}}"] & x_1 \arrow[d, "h^{\mathrm{ad}}"] \\ G(y_0) \arrow[r, "G(k)"] & G(y_1) \end{tikzcd}$$

kommutativ in $\mathcal{C}$. Beweis:

$$h^{\mathrm{ad}} \circ e = (h \circ F(e))^{\mathrm{ad}} = (k \circ g)^{\mathrm{ad}} = G(k) \circ g^{\mathrm{ad}}$$

wobei die äusseren Gleichheitszeichen die Natürlichkeitseigenschaften der Adjunktion ausnutzen. Im Spezialfall $y_0 = F(x_0)$, $y_1 = F(x_1)$ und $g = \mathrm{id}$, $h = \mathrm{id}$, $k = F(e)$ erhalten wir die Aussage, dass η_x natürlich ist.

Proposition 6.1. *Eine Adjunktion $F\colon \leftrightarrows\colon G$ ist eindeutig bestimmt durch die zugehörige natürliche Transformation $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow G \circ F$, die man* Einheit *der Adjunktion nennt. Denn die Adjunktion kann geschrieben werden als Zusammensetzung von*

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(F(x), y) \longrightarrow \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(G(F(x)), G(y)) \longrightarrow \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(x, G(y))$$

wobei der linke Pfeil durch Anwenden von G gegeben ist und der rechte durch Zusammensetzen mit $\eta_x\colon x \to G(F(x))$.

Das haben wir schon bewiesen. Umgekehrt kann man sagen: wenn Funktoren $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ gegeben sind mit einer natürlichen Transformation $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow G \circ F$, dann haben wir natürliche Abbildungen

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(F(x), y) \longrightarrow \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(G(F(x)), G(y)) \longrightarrow \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(x, G(y))$$

wie oben ... und wenn die Zusammensetzung dieser beiden bijektiv ist, dann haben wir eine Adjunktion, $F\colon \leftrightarrows \colon G$. (Kleine Aufgabe: Zeigen, dass dann η die Einheit dieser Adjunktion ist.)

Analog dazu: eine Adjunktion $F\colon \leftrightarrows \colon G$ bestimmt eine natürliche Transformation

$$\varepsilon\colon F \circ G \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{D}}\,.$$

Für ein Objekt y in $\mathcal{D}$ ist $\varepsilon_y \in \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(F(G(y)), y)$ das Element, das zu

$$\mathrm{id}_{G(y)} \in \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(G(y), G(y))$$

adjungiert ist.

Proposition 6.2. *Eine Adjunktion $F\colon \leftrightarrows \colon G$ ist eindeutig bestimmt durch die zugehörige natürliche Transformation $\varepsilon\colon F \circ G \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$, die man* Koeinheit *der Adjunktion nennt. Denn die Adjunktion kann geschrieben werden als Zusammensetzung von*

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(x, G(y)) \longrightarrow \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(F(x), F(G(y))) \longrightarrow \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(F(x), y)$$

wobei der linke Pfeil durch Anwenden von F gegeben ist und der rechte durch Zusammensetzen mit $\varepsilon_y\colon F(G(y)) \to y$.

7. Prägarben, Garben und ihre Halme

Als wichtiges Beispiel einer Adjunktion von Funktoren soll demnächst *Vergarbung* behandelt werden, und damit der Begriff *Garbe* in einer nicht-sehr-allgemeinen Form. Man kann dieses Beispiel aber auch als eine Überleitung zu neuen Themen betrachten.

Definition 7.1. Eine *Prägarbe* auf einem topologischen Raum $X = (X, \mathtt{U})$ ist ein kontravarianter Funktor $\mathcal{F}$ von $\mathtt{U}$ nach **Set**, wobei $\mathtt{U}$ in der üblichen Weise als geordnete Menge (und damit als Kategorie) aufgefasst wird.

Entschlüsselung: $\mathcal{F}$ ist eine Regel, die jeder offenen Menge V von X eine Menge $\mathcal{F}(V)$ zuordnet und jeder Inklusion $V \subset W$ von offenen Mengen eine Abbildung $\mathcal{F}(W) \to \mathcal{F}(V)$, die übrigens oft in der Form $\mathrm{res}_{V,W}\colon F(W) \to F(V)$ geschrieben wird. Es soll gelten $\mathrm{res}_{V,V} = \mathrm{id}$ für alle V und $\mathrm{res}_{U,V} \circ \mathrm{res}_{V,W} = \mathrm{res}_{U,W}$ wenn $U \subset V \subset W$.

Beispiel 7.2. Wichtiges und naheliegendes Beispiel einer Prägarbe: X topologischer Raum wie oben und Y ein anderer topologischer Raum. Für U offen in X sei $\mathcal{F}(U)$ die Menge der stetigen Abbildungen von U nach Y. Für offene Teilmengen $U \subset V$ von X sei die Abbildung $\mathrm{res}_{U,V}\colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ gegeben durch Einschränkung.

Beispiel 7.3. Sei $p\colon Y \to X$ irgendeine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Für U offen in X sei $\mathcal{F}(U)$ definiert als die Menge der stetigen Abbildungen s von U nach Y derart, dass $p \circ s$ gleich der Inklusion $U \to X$ ist. Für $U \subset V$, offene Teilmengen von X, sei $\mathrm{res}_{U,V}\colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ gegeben durch Einschränkung.

Beispiel 7.4. Hier nehmen wir an, dass X eine differenzierbare (glatte) Mannigfaltigkeit ist. Für U offen in X sei $\mathcal{F}(U)$ die Menge der glatten (unendlich oft differenzierbaren) Funktionen von U nach $\mathbb{R}$. Für $U \subset V$, offene Teilmengen von X, sei

$$\mathrm{res}_{U,V}\colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$$

gegeben durch Einschränkung.

Beispiel 7.5. Gegeben topologischer Raum X und irgendeine Menge S. Setze $\mathcal{F}(U) = S$ für jedes offene $U \subset X$. Für $U \subset V$ offen in X setze $\mathrm{res}_{V,U} = \mathrm{id}_S \colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$.

Beispiel 7.6. Gegeben topologische Räume X und Y. Für eine offene Teilmenge U von X sei $\mathcal{F}(U) = [U, Y]$, die Menge der Homotopieklassen von stetigen Abbildungen von U nach Y. Wie üblich soll $\mathrm{res}_{U,V} \colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ durch Einschränkung definiert werden, falls $U \subset V$ offen in X.

Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X, und U, V offene Teilmengen von X mit $U \subset V$. Für $s \in \mathcal{F}(V)$ schreiben wir oft $s_{|U}$ statt $\mathrm{res}_{U,V}(s)$.

Definition 7.7. Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X heisst *Garbe*, wenn sie folgende zusätzliche Eigenschaft hat. Für jede Auswahl $(W_i)_{i\in\Lambda}$ von offenen Teilmengen von X und jede Auswahl $(s_i \in \mathcal{F}(W_i))_{i\in\Lambda}$ mit der Eigenschaft $s_{i|W_i\cap W_j} = s_{j\,|W_i\cap W_j} \in \mathcal{F}(W_i \cap W_j)$ existiert genau ein

$$s \in \mathcal{F}(\bigcup_{i\in\Lambda} W_i)$$

mit der Eigenschaft $s_{|W_i} = s_i$ für alle $i \in \Lambda$.

Bemerkung 7.8. Ein paar einfache Folgerungen aus der Garbeneigenschaft: erstens, $\mathcal{F}(\emptyset)$ muss genau ein Element haben. Zweitens, wenn die W_i in der obigen Formulierung paarweise disjunkt sind, dann muss gelten

$$\mathcal{F}(\bigcup_i W_i) \cong \prod_i \mathcal{F}(W_i) \ ;$$

genauer, die Einschränkungsabbildungen

$$\mathrm{res}_{W_j\,,\bigcup_i W_i} \colon \mathcal{F}(\bigcup_i W_i) \longrightarrow \mathcal{F}(W_j)$$

bestimmen eine Abbildung von $\mathcal{F}(\bigcup_i W_i)$ nach $\prod_i \mathcal{F}(W_i)$, und diese muss bijektiv sein.

Diskussion zu Beispiel 7.2. Es ist eine Garbe.

Diskussion zu Beispiel 7.3. Es ist eine Garbe.

Diskussion zu Beispiel 7.4. Es ist eine Garbe. Interessant ist hier, dass diese Garbe etwas ausdrückt, was nicht aus der Welt der topologischen Räume kommt, etwas Differenzierbares eben. Man kann sogar den Begriff *glatte Mannigfaltigkeit* definieren ungefähr wie folgt: eine glatte Mannigfaltigkeit ist eine topologische Mannigfaltigkeit X ausgerüstet mit einer Garbe $\mathcal{F}$. Diese Garbe $\mathcal{F}$ soll eine Untergarbe von der Garbe $\mathcal{G}$ der stetigen Funktionen auf offenen Teilmengen von X sein; die Elemente von $\mathcal{F}(U)$ soll man sich als die glatten Funktionen von U nach $\mathbb{R}$ vorstellen, usw. (weitere Bedingungen). Das ist eine Alternative zur üblichen Definition von glatten Mannigfaltigkeiten mit Atlas und Karten.

Diskussion zu Beipiel 7.5. Hier müssen wir eine kleine Fallunterscheidung machen. Wenn S genau ein Element hat, dann ist diese Prägarbe eine Garbe, und das ist leicht zu beweisen. Wenn S mehr als ein Element hat, oder leer ist, dann kann man mit Hilfe von Bemerkung 7.8 sehr schnell sehen, dass diese Prägarbe keine Garbe ist.

Diskussion zu Beispiel 7.6. Im Allgemeinen ist diese Prägarbe keine Garbe. Hier genügt es aber nicht, Bemerkung 7.8 anzuwenden, sondern man muss etwas tiefer bohren. Man nehme $X = Y = S^1$, wobei S^1 als Teilmenge von $\mathbb{C}$ aufgefasst wird. In X haben wir die offenen Teilmengen U_1 und U_2 mit $U_1 = S^1 - \{1\}$ und $U_2 = S^1 \smallsetminus \{-1\}$. Weil U_1 und U_2 in **Toph** isomorph zu einpunktigen Räumen sind, ergibt sich, dass $\mathcal{F}(U_1)$ und $\mathcal{F}(U_2)$ beide genau ein Element haben. Weil $U_1 \cap U_2$ in **Toph** isomorph zu einem diskreten Raum mit zwei Elementen ist, ergibt sich, dass $\mathcal{F}(U_1 \cap U_2)$ auch genau ein Element hat. Aber $\mathcal{F}(U_1 \cap U_2)$ hat unendlich viele (verschiedene) Elemente.

Sei $X = (X, \mathtt{U})$ ein topologischer Raum. Wir haben eine Prägarbe definiert als einen kontravarianten Funktor $\mathcal{F}$ von $\mathtt{U}$ (als geordneter Menge) nach **Set**. Deswegen definieren wir einen Morphismus von Prägarben auf X, etwa von $\mathcal{F}$ nach $\mathcal{G}$, als natürliche Transformation zwischen solchen Funktoren. Entschlüsselung:

Definition 7.9. Für Prägarben $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ auf einem topologischen Raum X verstehen wir unter einem Morphismus von $\mathcal{F}$ nach $\mathcal{G}$ eine Regel, die für jede offene Teilmenge U von X eine Abbildung

$$\lambda_U \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$$

auswählt und dabei folgende Bedingung erfüllt. Wenn U und V offene Teilmengen von X sind, $U \subset V$, dann ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\lambda_U"] & \mathcal{G}(U) \\ \mathcal{F}(V) \arrow[u, "\mathrm{res}_{V,U}"] \arrow[r, "\lambda_V"] & \mathcal{G}(V) \arrow[u, "\mathrm{res}_{V,U}"'] \end{tikzcd}$$

kommutativ.

Damit bilden die Prägarben auf X eine (kleine) Kategorie, $\mathbf{prSh}(X)$. Die Garben auf X bilden eine volle Unterkategorie davon, $\mathbf{Sh}(X)$. Es soll jetzt gezeigt werden, dass der Inklusionsfunktor

$$\mathbf{Sh}(X) \longrightarrow \mathbf{prSh}(X)$$

einen Linksadjungierten besitzt. Dieser Linksadjungierte heisst *Vergarbung.* Bei der Beschreibung dieses Funktors soll folgende Definition helfen.

Definition 7.10. Gegeben sei topologischer Raum $X = (X, \mathtt{U})$, Element z von X und Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X. Sei $\mathtt{U}(z) \subset \mathtt{U}$ die Menge aller offenen Umgebungen von z in X. Der *Halm* $\mathcal{F}_z$ von $\mathcal{F}$ bei z ist die Menge

$$\operatorname{colim} \mathcal{F}_{|\mathtt{U}(z)^{\mathrm{op}}} \;.$$

Entschlüsselt: Die offenen Teilmengen U von X, die z enthalten, bilden eine geordnete Menge $\mathtt{U}(z)$, und $\mathcal{F}$ kann nach Einschränkung als Funktor von $\mathtt{U}(z)^{\mathrm{op}}$ nach **Set** aufgefasst werden. Der Kolimes von diesem Funktor ist $\mathcal{F}_z$, eine Menge. Noch mehr entschlüsselt: ein Element von $\mathcal{F}_z$ ist eine Äquivalenzklasse von Paaren (U, s) wobei U offene Umgebung von z in X und $s \in \mathcal{F}(U)$. Zwei solche Paare (U, s) und (V, t) sind äquivalent genau dann, wenn offene Umgebung W von z in X existiert mit $W \subset U \cap V$ und

$$s_{|W} = t_{|W} \;.$$

(Die Äquivalenzklassen nennt man oft *Keime*. Ob sich das gut verträgt mit der Wortwahl *Halm*, mag dahingestellt bleiben. Wir sind jedenfalls genötigt, uns jeden Halm als Ansammlung von Keimen vorzustellen.)

Beispiel 7.11. Sei X die Vereinigung der zwei Koordinatenachsen in $\mathbb{R}^2$ (mit der Topologie, die durch eine der üblichen Metriken bestimmt wird). Für offenes U in X sei $\mathcal{G}(U)$ die Menge der Zusammenhangskomponenten von $X \smallsetminus U$. Für offene Teilmengen U, V von X mit $U \subset V$ sei

$$\mathrm{res}_{V,U} \colon \mathcal{G}(V) \to \mathcal{G}(U)$$

die Abbildung, die eine Zusammenhangskomponente C von $X \smallsetminus V$ auf diejenige Zusammenhangskomponente von $X \smallsetminus U$ schickt, die C enthält. Dadurch wird $\mathcal{G}$ zu einer Prägarbe. Wie sehen die Halme $\mathcal{G}_z$ aus ? Wenn $z = (0,0)$, dann hat $\mathcal{G}_z$ genau vier Elemente. In allen anderen Fällen hat $\mathcal{G}_z$ genau zwei Elemente.

Bemerkung 7.12. Die Konstruktion $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_z$ für $z \in X$ und $\mathcal{F}$ Prägarbe auf X ist eigentlich ein Funktor von $\mathbf{prSh}(X)$ nach $\mathbf{Set}$. Denn ein Morphismus (natürliche Transformation) von $\mathcal{F}$ nach $\mathcal{G}$ bestimmt auch eine natürliche Transformation von $\mathcal{F}_{|\mathtt{U}(z)}$ nach $\mathcal{G}_{|\mathtt{U}(z)}$ und damit eine Abbildung von Mengen $\mathcal{F}_z \to \mathcal{G}_z$.

Im Fall einer Garbe $\mathcal{F}$ auf X sagen die Halme $\mathcal{F}_z$ viel über $\mathcal{F}$ aus, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 7.13. *Sei $\beta \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus in* $\mathbf{Sh}(X)$. *Wenn für jedes $z \in X$ die induzierte Abbildung $\mathcal{F}_z \to \mathcal{G}_z$ der Halme eine Bijektion ist, dann ist β ein Isomorphismus von Garben.*

Beweis. Wir sollen zeigen, dass $\beta_U \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ bijektiv ist für jedes offene U in X. Zur Abkürzung schreiben wir $\beta \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$.
Wir können U festhalten. Zuerst soll gezeigt werden, dass die Abbildung $\beta \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ injektiv ist. Dazu haben wir ein kommutatives Diagramm von Mengen und Abbildungen:

$$\begin{array}{ccc} \prod_{z\in U} \mathcal{F}_z & \xrightarrow{\beta} & \prod_{z\in U} \mathcal{G}_z \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{G}(U) \end{array}$$

Die Abbildung in der linken Spalte erhält man so: jedes $s \in \mathcal{F}(U)$ bestimmt ein Paar (U, s), das ein Element von $\mathcal{F}_z$ repräsentiert, für jedes $z \in U$. Die Abbildung in der linken Spalte ist genauso definiert. Wir zeigen erstmal, dass die Abbildung in der linken Spalte injektiv ist. Angenommen, dass $s, t \in \mathcal{F}(U)$ dasselbe Bild in $\prod_{z\in U} \mathcal{F}_z$ haben. Dann folgt, dass jedes $z \in U$ eine offene Umgebung W_z in U besitzt mit $s_{|W_z} = t_{|W_z}$. Wir wählen so ein W_z für jedes $z \in U$ und haben damit eine offene Überdeckung $(W_z)_{z\in U}$ von U. Da $s_{|W_z} = t_{|W_z}$ für alle W_z , folgt aus der Garbeneigenschaft von $\mathcal{F}$, dass $s = t$. Also sind die vertikalen Pfeile im Diagramm injektiv, wie behauptet. Aber der horizontale Pfeil oben im Diagramm ist bijektiv nach Voraussetzung. Also muss $\beta \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(G)$ injektiv sein. Jetzt muss noch die Surjektivität von $\beta \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ gezeigt werden. Gegeben also

$t \in \mathcal{G}(U)$. Wegen der Bedingung an $\mathcal{F}_z \to \mathcal{G}_z$ können wir eine offene Überdeckung $(W_i)_{i\in\Lambda}$ von U finden derart, dass

$$t_{|W_i} = \beta(s_i)$$

für ein $s_i \in \mathcal{F}(W_i)$. Wir wollen zeigen, dass $s_{i|W_i\cap W_j} = s_{j\,|W_i\cap W_j}$ für alle $i,j \in \Lambda$. Wegen Injektivität von β genügt es dazu, nachzuweisen, dass

$$\beta(s_i)_{|W_i\cap W_j} = \beta(s_j)_{|W_i\cap W_j} \;;$$

das folgt aber aus $\beta(s_i) = t_{|W_i}$ und $\beta(s_j) = t_{|W_j}$. Demnach gibt es aufgrund der Garbeneigenschaft von $\mathcal{F}$ genau ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $s_{|W_i} = s_i$. Mit der Garbeneigenschaft von $\mathcal{G}$ folgt dann $\beta(s) = t$. □

Wir bauen jetzt einen Funktor $\Phi\colon \mathbf{prSh}(X) \to \mathbf{Sh}(X)$ und dazu eine natürliche Transformation $\eta\colon \mathrm{id} \Rightarrow \Phi$ mit der Eigenschaft, dass für jedes $\mathcal{F}$ in $\mathbf{prSh}(X)$ der Morphismus

$$\eta_{\mathcal{F}}\colon \mathcal{F} \to \Phi\mathcal{F}$$

eine Bijektion der Halme $\mathcal{F}_z \to (\Phi\mathcal{F})_z$ induziert, für jedes $z \in X$.

Für offenes U in X wird $(\Phi\mathcal{F})(U)$ definiert als Teilmenge von

$$\prod_{z\in U} \mathcal{F}_z \;.$$

Man denke sich ein Element von diesem Produkt als eine Funktion, die für jedes $z \in U$ ein Element $s(z) \in \mathcal{F}_z$ auswählt. Diese Funktion s wird als Element von $(\Phi\mathcal{F})(U)$ zugelassen genau dann, wenn es die folgende Kohärenzbedingung erfüllt. Für jedes $y \in U$ gibt es eine offene Umgebung W von y in U und $t \in \mathcal{F}(W)$ derart, dass das Paar (W,t) simultan die Werte $s(z) \in \mathcal{F}_z$ für alle $z \in W$ repräsentiert.
Aus dieser Definition ergeben sich Einschränkungsabbildungen

$$\mathrm{res}_{V,U}\colon (\Phi\mathcal{F})(V) \to (\Phi\mathcal{F})(U)$$

für U,V offen in X mit $U \subset V$. Denn eine Funktion s, die für jedes $z \in V$ ein Element $s(z) \in \mathcal{F}_z$ auswählt, wählt erst recht für jedes $z \in U$ ein Element $s(z) \in \mathcal{F}_z$ aus. Die Kohärenzbedingung wird von $s_{|U}$ erfüllt, wenn sie von s erfüllt wird. Mit diesen Einschränkungsabbildungen wird $\Phi\mathcal{F}$ zu einer Prägarbe. Es ist leicht zu sehen, dass es sich sogar um eine Garbe handelt. Der Morphismus $\eta_{\mathcal{F}}\colon \mathcal{F} \to \Phi\mathcal{F}$ kann dann so definiert werden: für $t \in \mathcal{F}(U)$ ist $\eta(t)$ die Funktion, die für jedes $z \in U$ den Keim (Äquivalenzklasse usw.) von (U,t) an der Stelle z auswählt.
Es muss noch gezeigt werden, dass für jedes $z \in X$ die Abbildung $\mathcal{F}_z \to (\Phi\mathcal{F})_z$, die durch $\eta_{\mathcal{F}}$ bestimmt wird, eine Bijektion ist. Wir halten z fest. *Injektivität*: gegeben $a,b \in \mathcal{F}_z$ repräsentiert durch Paare $(U_a\,, s_a)$ bzw $(U_b\,, s_b)$, wobei $U_a\,, U_b$ offene Umgebungen von z in X sind und $s_a \in \mathcal{F}(U_a)$, $s_b \in \mathcal{F}(U_b)$. Angenommen, dass a und b auf dasselbe Element $t \in (\Phi\mathcal{F})_z$ abgebildet werden. Dann ist speziell $t(z) \in \mathcal{F}_z$ der Keim von s_a bei z, und auch der Keim von s_b bei z, also sind diese beiden Keime gleich, wie zu zeigen war. *Surjektivität*: ein Element von $(\Phi\mathcal{F})_z$ sei repräsentiert durch (U,t), wobei U offene Umgebung von z in X und $t \in (\Phi\mathcal{F})(U)$. Wegen der Kohärenzbedingung gibt es eine offene Umgebung W von z in U und $s \in \mathcal{F}(W)$ derart, dass $t_{|W}$ mit der Funktion übereinstimmt, die jedem $y \in W$ den Keim von (W,s) in $\mathcal{F}_y$ zuordnet. Das bedeutet

aber, dass die Abbildung $\mathcal{F}_z \to (\Phi\mathcal{F})_z$ das Element von $\mathcal{F}_z$ repräsentiert durch (W, s) auf das Element von $(\Phi\mathcal{F})_z$ repräsentiert durch (U, t) abbildet.

8. Vergarbung

Beispiel 8.1. Sei $\mathcal{F}$ die konstante Prägarbe auf X wie in Beispiel 7.5, also $\mathcal{F}(U) = S$ für alle U offen in X. Wie sieht $\Phi\mathcal{F}$ aus? Es ist klar, dass $\mathcal{F}_z$ mit S identifiziert ist für jedes $z \in X$. Demnach sind Elemente von $(\Phi\mathcal{F})(U)$ Funktionen von U nach S, die eine gewisse Kohärenzeigenschaft haben. Bei näherer Betrachtung erweist sich diese Eigenschaft als gleichbedeutend mit *lokal konstant.*[8] Statt lokal konstant kann man auch sagen *stetig*, wenn dabei S als topologischer Raum mit der diskreten Topologie verstanden wird (alle Teilmengen von S sind offen). Beachten, dass lokal konstant nicht konstant bedeutet; zum Beispiel könnte $X = \mathbb{R}$ sein mit der üblichen Topologie, $U = \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}$, und S eine Menge mit zwei Elementen; dann ist $\Phi\mathcal{F}(U)$ schon überabzählbar unendlich.

Unter den kategorischen Eigenschaften von Φ und η sollte noch eine erwähnt werden. Für eine beliebige Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X ist der Morphismus

$$\Phi(\eta_{\mathcal{F}}) \colon \Phi(\mathcal{F}) \to \Phi(\Phi(\mathcal{F})),$$

der durch Anwenden des Funktors Φ auf $\eta_{\mathcal{F}} \colon \mathcal{F} \to \Phi(\mathcal{F})$ entsteht, ein Isomorphismus von Garben. (Man soll ihn nicht ohne Begründung mit $\eta_{\Phi\mathcal{F}} \colon \Phi(\mathcal{F}) \to \Phi(\Phi(\mathcal{F}))$ gleichsetzen.) Das folgt leicht durch Anwenden von Satz 7.13. Denn wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\eta_{\mathcal{F}}"] \arrow[d, "\eta_{\mathcal{F}}"] & \Phi(\mathcal{F}) \arrow[d, "\eta_{\Phi(\mathcal{F})}"] \\
\Phi(\mathcal{F}) \arrow[r, "\Phi(\eta_{\mathcal{F}})"] & \Phi(\Phi(\mathcal{F}))
\end{tikzcd}$$

in dem der obere Pfeil und die beiden vertikalen Pfeile Bijektionen der Halme bei z induzieren, für jedes $z \in X$. Also gilt das auch für den unteren Pfeil.

Satz 8.2. *Der Inklusionsfunktor* $\mathbf{Sh}(X) \to \mathbf{prSh}(X)$ *hat einen Linksadjungierten* Φ. *Genauer gesagt, jeder Morphismus* β *von einer Prägarbe* $\mathcal{F}$ *auf* X *in eine Garbe* $\mathcal{G}$ *auf* X *lässt sich eindeutig wie folgt zerlegen:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\eta_{\mathcal{F}}"] & \mathcal{G} \\
\Phi\mathcal{F} \arrow[ur, dotted, "\beta_1"'] &
\end{tikzcd}$$

[8] Eine Funktion von U nach S ist lokal konstant, wenn jedes $z \in U$ eine Umgebung in U besitzt, in der die Funktion konstant ist.

Beweis. Man wende Φ und η an auf $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ und β. Es ergibt sich ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\eta_{\mathcal{F}}"] & \mathcal{G} \arrow[d, "\eta_{\mathcal{G}}"] \\
\Phi\mathcal{F} \arrow[r, "\Phi\beta"] & \Phi\mathcal{G}
\end{tikzcd}$$

Nach Konstruktion bestimmen die vertikalen Pfeile Bijektionen der Halme, $\mathcal{F}_z \to (\Phi\mathcal{F})_z$ und $\mathcal{G}_z \to (\Phi\mathcal{G})_z$ für jedes $z \in X$. Weil sowohl $\mathcal{G}$ als auch $\Phi\mathcal{G}$ Garben sind, kann Satz 7.13 angewandt werden. Es folgt, dass der rechte vertikale Pfeil ein Isomorphismus von Garben ist. Sei $\lambda\colon \Phi\mathcal{G} \to \mathcal{G}$ der inverse Isomorphismus. Dann gibt es eine Zerlegung wie erhofft mit $\beta_1 = \lambda \circ \Phi\beta$. Um zu sehen, dass diese Lösung eindeutig ist, wende man Φ und η an auf das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\eta_{\mathcal{F}}"] & \mathcal{G} \\
\Phi\mathcal{F} \arrow[ur, dotted] &
\end{tikzcd}$$

in $\mathbf{prSh}(X)$. Es ergibt sich ein kommutatives Diagramm in $\mathbf{prSh}(X)$ von der Form eines Prismas:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\eta_{\mathcal{F}}"] \arrow[dr] & \mathcal{G} \arrow[dr, "\eta_{\mathcal{G}}"] & \\
\Phi\mathcal{F} \arrow[ur, dotted] \arrow[dr] & \Phi\mathcal{F} \arrow[r, "\Phi\beta"] \arrow[d, "\Phi(\eta_{\mathcal{F}})"] & \Phi\mathcal{G} \\
 & \Phi(\Phi\mathcal{F}) \arrow[ur, dotted] &
\end{tikzcd}$$

Hier ist der Pfeil $\Phi(\eta_{\mathcal{F}})$ ein Isomorphismus von Garben, wie oben ausdrücklich bemerkt. Dadurch wird der untere gestrichelte Pfeil eindeutig bestimmt. Aber der Pfeil $\eta_{\mathcal{G}}$ ist auch ein Isomorphismus wegen Satz 7.13 und Konstruktion von η. Deswegen wird der obere gestrichelte Pfeil durch den unteren bestimmt. $\square$

Der praktische Satz 7.13 kann noch wie folgt ergänzt werden.

Lemma 8.3. *Gegeben Morphismen $\alpha, \beta\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ in $\mathbf{Sh}(X)$. Wenn für jedes $z \in X$ gilt, dass $\alpha_z = \beta_z\colon \mathcal{F}_z \to \mathcal{G}_z$, dann ist $\alpha = \beta$.*

Beweis. Wir benutzen wie im Beweis von Satz 7.13 die Tatsache, dass die kanonischen Abbildungen

$$\begin{tikzcd}
\prod_{z\in U} \mathcal{F}_z & \prod_{z\in U} \mathcal{G}_z \\
\mathcal{F}(U) \arrow[u] & \mathcal{G}(U) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

für jedes offene U in X injektiv sind. □

Definition 8.4. (*Sehr verspätet.*) Ein Morphismus $h\colon y \to z$ in einer beliebigen Kategorie $\mathcal{D}$ wird *Monomorphismus* genannt, wenn $h\circ\colon \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(x,y) \to \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(x,z)$ injektiv ist für alle Objekte x in $\mathcal{D}$. Ein Morphismus $h\colon y \to z$ in einer beliebigen Kategorie $\mathcal{D}$ wird *Epimorphismus* genannt, wenn $\circ h\colon \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(z,x) \to \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(z,y)$ injektiv ist für alle x in $\mathcal{D}$.

Korollar 8.5. *Ein Morphismus $\beta\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ in $\mathbf{Sh}(X)$ ist genau dann ein Monomorphismus, wenn für jedes $z \in X$ die induzierte Abbildung der Halme $\beta_z\colon \mathcal{F}_z \to \mathcal{G}_z$ injektiv ist, und auch genau dann, wenn für jedes offene U in X die Abbildung $\beta_U\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ injektiv ist.*

Ein Morphismus $\beta\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ in $\mathbf{Sh}(X)$ ist genau dann ein Epimorphismus, wenn für jedes $z \in X$ die induzierte Abbildung der Halme $\beta_z\colon \mathcal{F}_z \to \mathcal{G}_z$ surjektiv ist.[9]

Beweis. Angenommen, β_z ist immer injektiv. Dann ist (mit dem Argument aus Beweis von Lemma 8.3) klar, dass $\beta_U\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ immer injektiv ist, und daraus folgt mit der Definition von *Monomorphismus* sofort, dass β ein Monomorphismus ist.

Angenommen, es gibt ein $z \in X$ derart, dass $\beta_z\colon \mathcal{F}_z \to \mathcal{G}_z$ nicht injektiv ist. Dann gibt es auch ein offenes U in X (mit $z \in U$) und Elemente s,t in $\mathcal{F}(U)$ derart, dass $s \neq t$, aber $\beta(s) = \beta(t) \in \mathcal{G}(U)$. Wir bauen jetzt eine Garbe $\mathcal{E}$ auf X mit $\mathcal{E}(V)$ einelementig wenn $V \subset U$ und $\mathcal{G}(V) = \emptyset$ sonst. (Beachten, dass $\emptyset \subset U$, also $\mathcal{E}(\emptyset)$ ist einelementig, wie es sich gehört.) Dann haben wir zwei interessante Morphismen α_s, α_t von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{F}$. Der Morphismus α_s bildet das einzige Element von $\mathcal{E}(V)$, falls $V \subset U$, auf $s|_V \in \mathcal{F}(V)$ ab. Ähnliche Definition von α_t mit t statt s. Wir sehen, dass $\beta \circ \alpha_s = \beta \circ \alpha_t$ ist, obwohl $\alpha_s \neq \alpha_t$. Also ist β kein Monomorphismus.

Angenommen, $\beta_z\colon \mathcal{F}_z \to \mathcal{G}_z$ ist surjektiv für jedes $z \in X$. Dann folgt mit Lemma 8.3 und der Definition von *Epimorphismus* sofort, dass β ein Epimorphismus ist. Umgekehrt, es gebe ein $y \in X$ derart, dass $\beta_y\colon \mathcal{F}_y \to \mathcal{G}_y$ nicht surjektiv ist. Wir wählen eine Menge S und zwei Abbildungen $u,v\colon \mathcal{G}_y \to S$ derart, dass $u \neq v$ aber $u \circ \beta_y = v \circ \beta_y$. Aus der Menge S machen wir eine Wolkenkratzergarbe $\mathcal{H}$, also $\mathcal{H}(V) = S$ falls V offen in X und $y \in V$, sonst $\mathcal{H}(V)$ einelementig. Dann ist es leicht, zwei Morphismen $\gamma, \delta\colon \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ herzustellen, so dass u mit $\gamma_y\colon \mathcal{G}_y \to \mathcal{H}_y = S$ übereinstimmt und v mit $\delta_y\colon \mathcal{G}_y \to \mathcal{H}_y = S$. Durch diese Bedingungen sind γ, δ auch bestimmt. Man sieht leicht, dass $\gamma \circ \beta = \delta \circ \beta$. Also ist β kein Epimorphismus. □

9. Abelsche Kategorien

Wir machen jetzt ernst mit der homologischen Algebra und führen dazu die Begriffe *additive Kategorie* und *abelsche Kategorie* ein.

Definition 9.1. Eine *additive* Kategorie ist eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit zusätzlichen Daten, nämlich: für je zwei Objekte c,d aus $\mathcal{C}$, eine abelsche Gruppenstruktur auf der Menge $\mathrm{mor}(c,d)$. Dazu kommen weitere Bedingungen:

- Die Zusammensetzung von Morphismen ist bi-additiv (bilinear), das heisst, die Zusammensetzungsabbbildung

$$\mathrm{mor}(c,d) \times \mathrm{mor}(b,c) \longrightarrow \mathrm{mor}(b,d)$$

[9] Daraus folgt nicht, dass $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ surjektiv ist für jedes offene U in X.

ist bi-additiv für beliebige Objekte b, c, d in $\mathcal{C}$.

- Alle endlichen Produkte (Produkte über endliche Indexmengen) existieren in $\mathcal{C}$.

Erste Folgerungen. Jedes Objekt c einer additiven Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein (abelsches) Gruppenobjekt in kanonischer Weise, denn $\mathrm{mor}(-, c)$ ist ein Funktor von $\mathcal{C}$ nach **abGrp**.

Für Objekte c, d einer additiven Kategorie ist jede natürliche Transformation von $\mathrm{mor}(-, c)$ nach $\mathrm{mor}(-, d)$ automatisch additiv (d.h., ein natürlicher Homorphismus von abelschen Gruppen). Das folgt aus den Bedingungen und dem Yoneda-Lemma, weil so eine natürliche Transformation ohnehin durch einen Morphismus $f\colon c \to d$ induziert wird.

Für Objekte c, d, e aus $\mathcal{C}$ gibt es demnach natürliche Isomorphismen von abelschen Gruppen

$$\begin{aligned} & \mathrm{mor}(c \times d, e) \\ \cong\ & \mathrm{nat}(\mathrm{mor}(-, c \times d), \mathrm{mor}(-, e)) \\ \cong\ & \mathrm{nat}(\mathrm{mor}(-, c) \times \mathrm{mor}(-, d), \mathrm{mor}(-, e)) \\ \cong\ & \mathrm{nat}(\mathrm{mor}(-, c), \mathrm{mor}(-, e)) \times \mathrm{nat}(\mathrm{mor}(-, d), \mathrm{mor}(-, d)) \qquad (!) \\ \cong\ & \mathrm{mor}(c, e) \times \mathrm{mor}(d, e) \end{aligned}$$

(wobei ich ungehörigerweise $c \times d$ für das Produkt von c und d geschrieben habe). Das bedeutet: das Produkt $c \times d$ darf sich auch Koprodukt $c \sqcup d$ von c und d nennen! (Dieses eigentlich merkwürdige Phänomen ist uns natürlich schon aus der Kategorie der abelschen Gruppen bekannt.) Wichtige Folgerung also: in einer additiven Kategorie existieren auch alle endlichen Koprodukte.

Bemerkung 9.2. Die Bedingung angehend endliche Produkte kann man natürlich weglassen — dann heisst es *prä-additive Kategorie.*

Wenn wir die Bedingung mit den endlichen Produkten beibehalten, dann sollen darunter aber auch Produkte mit leerer Indexmenge verstanden sein; das heisst, es gibt in $\mathcal{C}$ ein terminales Objekt t. Für jedes Objekt c aus $\mathcal{C}$ ist dann $\mathrm{mor}(c, t) = 0$ (als abelsche Gruppe — weil wir eine abelsche Gruppe mit nur einem Element eben gerne mit 0 bezeichnen). Das terminale Objekt ist dann auch ein initiales Objekt, denn für jedes Objekt c in $\mathcal{C}$ gilt $\mathrm{mor}(t, c) = \mathrm{nat}(\mathrm{mor}(-, t), \mathrm{mor}(-, c)) = 0$. Deswegen nennen wir das terminale und gleichzeitig initiale Objekt in einer additiven Kategorie gerne 0, in Worten: Null.

Definition 9.3. Sei $f\colon c \to d$ ein Morphismus in einer additiven Kategorie. Unter einem *Kern* für f versteht man einen Morphismus

$$u\colon b \to c$$

mit der folgenden universellen Eigenschaft: $f \circ u = 0$, und jeder Morphismus $v\colon x \to c$ in $\mathcal{C}$ mit $f \circ v = 0$ lässt sich eindeutig schreiben als $u \circ v_1$ mit $v_1\colon x \to b$. Demnach ist b darstellendes Objekt für den Funktor

$$\ker[f\circ\colon \mathrm{mor}(-, c) \to \mathrm{mor}(-, d)]$$

und u ist das entsprechende universelle Element. (Ich bin stark versucht, zu schreiben: $b = \ker(f)$, aber das ist nicht ganz korrekt.)

Analog dazu: unter einem *Kokern* für $f\colon c \to d$ versteht man einen Morphismus

$$u\colon d \to e$$

mit der folgenden universellen Eigenschaft: $u \circ f = 0$, und jeder Morphismus $v \colon d \to x$ in $\mathcal{C}$ mit $v \circ f = 0$ lässt sich eindeutig schreiben als $v_1 \circ u$ mit $v_1 \colon e \to x$. Demnach ist e darstellendes Objekt für den Funktor

$$\ker[f\circ \colon \operatorname{mor}(d,-) \to \operatorname{mor}(c,-)]$$

und u ist das entsprechende universelle Element. (Ich bin stark versucht, zu schreiben: $e = \operatorname{coker}(f)$, aber das ist nicht ganz korrekt.)

Bemerkung 9.4. Wir sehen also, dass Kerne wie in Definition 9.3 immer Monomorphismen sind, und dass Kokerne immer Epimorphismen sind.

Definition 9.5. Eine additive Kategorie $\mathcal{C}$ heisst *abelsche Kategorie*, wenn sie die folgenden zusätzlichen Bedingungen erfüllt:

(i) Jeder Morphismus in $\mathcal{C}$ besitzt einen Kern und einen Kokern.
(ii) Emmy Nöthers erster Isomorphiesatz, hier als Bedingung: für jeden Morphismus $f \colon c \to d$ haben wir (kommutatives)

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "\ker(f)"] & c \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\operatorname{coker}(\ker(f))"'] \arrow[dr, dotted] & d \arrow[r, "\operatorname{coker}(f)"] & e \\
 & c' \arrow[r, dotted, "\cong"] & d' \arrow[u, "\ker(\operatorname{coker}(f))"'] &
\end{tikzcd}$$

Entschlüsselung von (ii): der Morphismus f bestimmt zuerst die horizontalen Pfeile $\ker(f)$ und $\operatorname{coker}(f)$, dann die vertikalen $\operatorname{coker}(\ker(f))$ und $\ker(\operatorname{coker}(f))$. Aus der universellen Eigenschaft von $\ker(\operatorname{coker}(f))$ folgt Existenz und Eindeutigkeit des gestrichelten diagonalen Pfeils, denn $\operatorname{coker}(f) \circ f = 0$. Ausserdem folgt aus der universellen Eigenschaft von $\operatorname{coker}(\ker(f))$ die Existenz und Eindeutigkeit des gestrichelten horizontalen Pfeils. Es wird jetzt gefordert, dass der gestrichelte horizontale Pfeil ein Isomorphismus ist!

MacLane schreibt auch $\operatorname{coim}(f)$ für $\operatorname{coker}(\ker(f))$ und $\operatorname{im}(f)$ für $\ker(\operatorname{coker}(f))$. Also bedeutet (ii) ungefähr, dass wir eine Faktorisierung

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\operatorname{coim}(f)"'] & & d \\
 & \bullet \arrow[ur, "\operatorname{im}(f)"'] &
\end{tikzcd}$$

haben, wobei eben $\bullet$ gleichzeitig das Ziel vom Epimorphismus $\operatorname{coim}(f)$ und die Quelle vom Monomorphismus $\operatorname{im}(f)$ ist.

Lemma 9.6. *In einer abelschen Kategorie ist jeder Monomorphismus der Kern von seinem Kokern, und jeder Epimorphismus der Kokern von seinem Kern.*

Beweis. Monomorphismus ist Kern von Kokern: sei f in Axiom (ii) ein Monomorphismus. Dann wird $b = 0$ und der vertikale Pfeil $\operatorname{coker}(\ker(f))$ wird demnach ein Isomorphismus, und wir sehen aus dem Diagramm, dass f eigentlich dasselbe ist wie $\ker(\operatorname{coker}(f))$, also tatsächlich der Kern von seinem Kokern. Epimorphismus ist Kokern von Kern: genauso, es ist eben der Spezialfall von Axiom (ii), in dem f epi ist und daher $e = 0$ usw. $\square$

Beispiel 9.7. Es sollte klar sein, dass die Kategorie **abGrp** die Bedingungen für eine abelsche Kategorie erfüllt. (Dabei soll jede Morphismenmenge $\mathrm{mor}_{\mathbf{abGrp}}(A,B)$ die übliche Struktur als abelsche Gruppe haben: punktweise Addition von Morphismen.)

Etwas allgemeiner: sei R irgendein Ring und sei $\mathcal{C}$ die Kategorie der (Links-)Moduln über R. Für Objekte M, N in $\mathcal{C}$ haben wir dann in $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(M,N)$ die übliche Struktur einer abelschen Gruppe: punktweise Addition. Damit wird dieses $\mathcal{C}$ zu einer abelschen Kategorie.

Beispiel 9.8. Sei $\mathcal{C}$ irgendeine abelsche Kategorie, sei $\mathcal{J}$ irgendeine kleine Kategorie und sei $\mathcal{P}$ die Kategorie der kontravarianten Funktoren von $\mathcal{J}$ nach $\mathcal{C}$. Dann hat $\mathcal{P}$ in kanonischer Weise die Struktur einer abelschen Kategorie. Genauer: Für Objekte E, F in $\mathcal{P}$ und Morphismen $v + w \in \mathrm{mor}_{\mathcal{P}}(E,F)$ ist $v + w$ punktweise definiert, also $(v+w)_j := v_j + w_j \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(E(j), F(j))$ für jedes Objekt $j \in \mathcal{J}$. Auf diese Weise wird $\mathcal{P}$ zu einer additiven Kategorie, und man überlegt sich, dass es wieder eine abelsche Kategorie ist. Kerne und Kokerne können koordinatenweise bestimmt werden. Das heisst, wenn wir einen Morphismus $v\colon E \to F$ in $\mathcal{P}$ haben, dann kann zum Beispiel

$$D \xrightarrow{\ker(v)} E$$

so bestimmt werden, dass für jedes j in $\mathcal{J}$ die Spezialisierung

$$(\ker(v))_j : D(j) \to E(j)$$

ein Kern für $v_j\colon E(j) \to F(j)$ ist. Genauer: für jedes Objekt j in $\mathcal{J}$ wählt man erstmal

$$(\ker(v))_j\colon D(j) \to E(j)$$

so, dass es ein Kern für $v_j\colon E(j) \to F(j)$ ist, und findet dann für jeden Morphismus $h\colon i \to j$ in $\mathcal{J}$ den induzierten Morphismus $D(h)$ als eindeutige Lösung der Aufgabe

$$\begin{tikzcd} D(i) \arrow[r, dotted, "D(h)"] \arrow[d, "(\ker(v))_i"'] & D(j) \arrow[d, "(\ker(v))_j"] \\ E(i) \arrow[r, "E(h)"] & E(j) \end{tikzcd}$$

Beispiel 9.9. Sei $X = (X, \mathtt{W})$ ein topologischer Raum. Sei $\mathcal{C}$ die Kategorie der Linksmoduln über einem fest gewählten Ring R. Unter einer *$\mathcal{C}$-wertigen Garbe* auf X verstehen wir einen kontravarianten Funktor von der geordneten Menge $\mathtt{W}$ der offenen Teilmengen von X nach $\mathcal{C}$, der eine Garbe wird, wenn wir den Vergissfunktor $\mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ nachschalten. Ein *Morphismus* zwischen $\mathcal{C}$-wertigen Garben auf X ist eine natürliche Transformation (zwischen kontravianten Funktoren von W nach $\mathcal{C}$).

Damit haben wir eine *Kategorie* $\mathbf{Sh}(X;\mathcal{C})$ der $\mathcal{C}$-wertigen Garben auf X. Mit punktweiser Addition von Morphismen wird sei zu einer additiven Kategorie. Behauptung: *es ist sogar eine abelsche Kategorie.*

Dazu könnte man sagen: $\mathbf{Sh}(X;\mathcal{C})$ ist ja definiert worden als volle Unterkategorie von $\mathcal{P} = \mathbf{prSh}(X;\mathcal{C})$, Kategorie der kontravarianten Funktoren von $\mathtt{W}$ nach $\mathcal{C}$, und $\mathbf{prSh}(X;\mathcal{C})$ ist eine abelsche Kategorie, wie wir im vorigen Beispiel gesehen haben. Wir können dann doch die Kerne und Kokerne in $\mathbf{Sh}(X;\mathcal{C})$ so definieren, wie in $\mathbf{prSh}(X;\mathcal{C})$. So geht es aber gerade nicht.

- Der Kern von einem Morphismus $v\colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ in $\mathbf{Sh}(X;\mathcal{C})$ kann tatsächlich in $\mathbf{prSh}(X;\mathcal{C})$ gebildet werden, und man kann dann leicht verifizieren, dass es ein Morphismus in $\mathbf{Sh}(X;\mathcal{C})$ ist. (Das heisst: wenn wir $\mathcal{D}(U)$ als den Kern von $\mathcal{E}(U) \to \mathcal{F}(U)$ im üblichen Sinn definieren, für jedes offene $U \subset X$, dann ist die Prägarbe $\mathcal{D}$ eine Garbe und die Inklusion $\mathcal{D} \to \mathcal{E}$ von Garben kann als $\ker(v)$ im strengen Sinn herhalten.)
- Wenn wir dagegen $\mathcal{G}(U)$ als den Kokern von $v_U : \mathcal{E}(U) \to \mathcal{F}(U)$ im üblichen Sinn definieren, für jedes offene $U \subset X$, dann ist die Prägarbe $\mathcal{G}$ im Allgemeinen keine Garbe. Stattdessen müssen wir mit der Vergarbung $\Phi\mathcal{G}$ von $\mathcal{G}$ arbeiten. Als wahrer Kokern von $v\colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ in $\mathbf{Sh}(X;\mathcal{C})$ bietet sich also an die Zusammensetzung von zwei Pfeilen in $\mathbf{prSh}(X;\mathcal{C})$,

  $$\mathcal{F} \xrightarrow{\text{Proj.}} \mathcal{G} \xrightarrow{\eta_{\mathcal{G}}} \Phi\mathcal{G}$$

  Mit dieser Definition von $\operatorname{coker}(v)$ in $\mathbf{Sh}(X;\mathcal{C})$ kann man auch die geforderte universelle Eigenschaft von $\operatorname{coker}(v)$ leicht bestätigen. Denn wenn $w\colon \mathcal{F} \to \mathcal{H}$ irgendein Morphismus in $\mathbf{Sh}(X;\mathcal{C})$ ist, der $w \circ v = 0$ erfüllt, dann erhalten wir die folgende Faktorisierung,

  $$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\text{Proj.}"] \arrow[dr, "w"'] & \mathcal{G} \arrow[r, "\eta_{\mathcal{G}}"] \arrow[d, dotted] & \Phi\mathcal{G} \arrow[dl, dotted] \\
& \mathcal{H} &
\end{tikzcd}$$

  (kommutatives Diagramm), wobei der mittlere vertikale Pfeil klar ist und der rechte dann durch den mittleren wegen der universellen Eigenschaft der Vergarbung Φ bestimmt wird. Denn $\mathcal{H}$ ist ja eine Garbe nach Voraussetzung.

Hier müsste man wahrscheinlich noch eine Menge Einzelheiten verifizieren, aber ich muss mich beherrschen und empfehle stattdessen als Hilfsmittel für alle derartigen Zwecke Satz 7.13, Lemma 8.3 und Korollar 8.5.

Bemerkung 9.10. Man könnte versuchen, Beispiel 9.9 so zu verallgemeinern: wir nehmen uns irgendeine abelsche Kategorie $\mathcal{C}$ und betrachten $\mathcal{C}$-wertige Garben auf X. Diese sollten wieder eine abelsche Kategorie $\mathbf{Sh}(X;\mathcal{C})$ bilden. Das ist auch wirklich ein guter Gedanke. Aber: es ist nicht so ganz klar, was eine $\mathcal{C}$-wertige Garbe auf X überhaupt ist. (Das Problem ist, dass Definition 7.7 mit "Elementen" arbeitet. Diese Definition müsste also gesäubert werden.)

Beispiel 9.11. Wenn $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie ist, dann hat auch $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ diese Struktur. Wenn ausserdem $\mathcal{A}$ abelsch ist, dann ist auch $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ eine abelsche Kategorie. (Kerne in $\mathcal{A}$ werden Kokerne in $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ und umgekehrt.)

Definition 9.12. Ein Diagramm der Form

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$$

in einer abelschen Kategorie heisst *exakt*, falls $\mathrm{im}(f)$ "gleich" $\ker(g)$ ist. Diese Definition ist listig, weil man hier sowohl die traditionelle als auch die abstrakte Definition von ker und im benutzen kann. In der abstrakten Definition sind $\mathrm{im}(f)$ und $\ker(g)$ Monomorphismen mit dem gemeinsamen Ziel y, und das Wort “gleich” (mit Anführungszeichen) bedeutet, dass wir einen (einzigen) Isomorphismus finden können (gestrichelter Pfeil), der das Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[rr, dotted, "\cong"] \arrow[dr, "\mathrm{im}(f)"'] & & {} \arrow[dl, "\ker(g)"] \\ & y & \end{tikzcd}$$

Wenn ausserdem f ein Monomorphismus ist und g ein Epimorphismus, dann heisst das Diagramm *kurz exakt*. (Gleichwertig: f ist mono und $g = \mathrm{coker}(f)$; auch g ist epi und $f = \ker(g)$.) Man kann auch stattdessen sagen: $0 \to x \to y \to z \to 0$ ist exakt. (Denn die Exaktheit von $0 \to x \to y$ bedeutet ja, dass $x \to y$ mono ist, und die Exaktheit von $y \to z \to 0$ bedeutet, dass $y \to z$ epi ist.)

Definition 9.13. Ein Funktor $F \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zwischen additiven Kategorien heisst *additiv*, falls $F(0) = 0$ und die durch F induzierten Abbildungen $\mathrm{mor}_{\mathcal{A}}(x, y) \to \mathrm{mor}_{\mathcal{B}}(F(x), F(y))$ Homomorphismen (von abelschen Gruppen) sind für beliebige Objekte x, y von $\mathcal{A}$.

Falls $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien sind: Ein additiver Funktor $F \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heisst *exakt*, wenn er jedes exakte Diagramm $x \to y \to z$ in $\mathcal{A}$ in ein exaktes Diagramm $F(x) \to F(y) \to F(z)$ überführt.

Lemma 9.14. Ein Funktor $F \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ wie oben ist genau dann exakt, wenn er jedes kurze exakte Diagramm in $\mathcal{A}$ in eine kurzes exaktes Diagramm in $\mathcal{B}$ überführt. □

Ein Hauptthema der homologischen Algebra sind additive Funktoren $F \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ (zwischen abelschen Kategorien), die etwas weniger als exakt sind.

Definition 9.15. Ein additiver Funktor $F \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zwischen abelschen Kategorien heisst so-und-so-exakt, wenn für jedes *kurze* exakte Diagramm $0 \to x \to y \to z \to 0$ in $\mathcal{A}$ das Diagramm

$$0 \to F(x) \to F(y) \to F(x) \to 0$$

in $\mathcal{B}$ die-und-die abgeschwächte Exaktheitseigenschaft besitzt:

- *links-exakt* falls $0 \to F(x) \to F(y) \to F(z)$ immer exakt (anders ausgedrückt, $F(x) \to F(y) \to F(z)$ exakt und $F(x) \to F(y)$ mono);
- *rechts-exakt* falls $F(x) \to F(y) \to F(z) \to 0$ immer exakt (anders ausgedrückt, $F(x) \to F(y) \to F(z)$ exakt und $F(y) \to F(z)$ epi);
- *halb-exakt* falls $F(x) \to F(y) \to F(z)$ immer exakt.

Bemerkung 9.16. Ein linksexakter Funktor überführt alle Monomorphismen in Monomorphismen; ein rechtsexakter Funktor überführt alle Epimorphismen in Epimorphismen. (Ein Monomorphismus $x \to y$ lässt sich schliesslich immer als Teil einer kurzen exakten Folge $x \to y \to z$ schreiben, usw.)

Beispiel 9.17. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und x ein festes Objekt von A. (Vorsicht, wir schreiben $\hom_{\mathcal{A}}$ statt $\mathrm{mor}_{\mathcal{A}}$.) Dann ist der Funktor $\hom_{\mathcal{A}}(x, -)$ von $\mathcal{A}$ nach **abGrp** (Kurzbeschreibung von $y \mapsto \hom(x, y)$) links-exakt. Das ist eine direkte Konsequenz der Definitionen (von Kernen und von Monomorphismen).

Ebenso ist der Funktor $\hom_{\mathcal{A}}(-,x)$ links-exakt, wenn wir ihn als einen Funktor von $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ nach **abGrp** auffassen.

Beispiel 9.18. Sei $\mathcal{C}$ die abelsche Kategorie der Linksmoduln über einem Ring R (mit Einheit). Sei M ein Rechtsmodul über R. Dann ist der Funktor $C \mapsto M \otimes_R C$ von $\mathcal{C}$ nach **abGrp** rechts-exakt.
Beweis. Wir schreiben $F(C) = M \otimes_R C$. Gegeben sei eine kurze exakte Folge $C \to D \to E$ in $\mathcal{A}$. Wir können so tun, also ob C ein Untermodul von D ist und $E = D/C$. Es ist klar, dass die Zusammensetzung $F(C) \to F(D) \to F(E)$ Null ist. Es ist klar, dass $F(D) \to F(E)$ surjektiv (=epi) ist. Es ist weniger klar, dass $F(D) \to F(E)$ sich auch "coker" von $F(C) \to F(D)$ nennen darf. Um das zu verstehen, erinnern wir uns, dass $F(D)$ das Ziel einer universellen Abbildung

$$M \times D \xrightarrow{\mu} F(D)$$

mit gewissen R-Bilinearitätseigenschaften ist. Wenn wir zusammensetzen

$$M \times D \xrightarrow{\mu} F(D) \xrightarrow{\mathrm{coker}(F(C) \to F(D))} \bullet$$

dann haben wir die universelle R-bilineare Abbildung mit der Quelle $M \times D$, die auf $M \times C$ Null ist. Das ist aber dasselbe, wie die universelle R-bilineare Abbildung mit Quelle $M \times D/C = M \times E$. Auf diese Weise ist $\bullet$ mit $M \otimes_R E = F(E)$ identifiziert. $\square$

Beispiel 9.19. Sei $\mathcal{C}$ die abelsche Kategorie der Linksmoduln über einem Ring R (mit Einheit) und sei X ein topologischer Raum. Dann haben wir die abelsche Kategorie $\mathbf{Sh}(X;\mathcal{C})$ der $\mathcal{C}$-wertigen Garben auf X. Sei z eine festes Element von X. Dann ist der Funktor

$$\mathbf{Sh}(X;\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$$

gegeben durch $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_z$ (Halm bei z) exakt.
Beweis: sei $\mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ eine kurze exakte Folge in $\mathbf{Sh}(X;\mathcal{C})$. Dann können wir so tun, als ob $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ ist (Untergarbe), und $\mathcal{G}$ die Vergarbung $\Phi(\mathcal{F}/\mathcal{E})$ der Prägarbe $\mathcal{F}/\mathcal{E}$, wobei $(\mathcal{F}/\mathcal{E})(U) = \mathcal{F}(U)/\mathcal{E}(U)$. Die Halme ändern sich bei Vergarbung nicht. Also müssen wir nur zeigen, dass das Diagramm

$$\mathrm{colim}_U\ \mathcal{E}(U) \longrightarrow \mathrm{colim}_U\ \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathrm{colim}_U\ \mathcal{F}(U)/\mathcal{E}(U)$$

ein kurzes exaktes Diagramm in $\mathcal{C}$ ist; hier durchläuft U die partiell geordnete Menge der offenen Umgebungen von z. Ich denke, dass das leicht ist.

Definition 9.20. Ein Objekt x einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ heisst *projektiv*, wenn der Funktor $\hom_{\mathcal{A}}(x,-)$ exakt ist (also nicht einfach nur links-exakt). Es heisst *injektiv*, wenn der Funktor $\hom_{\mathcal{A}}(-,x)$ exakt ist.

Bei der Untersuchung von additiven Funktoren $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ (zwischen abelschen Kategorien), die etwas weniger als exakt sind, spielen die projektiven und/oder injektiven Objekte in $\mathcal{A}$ eine wichtige Rolle. Das muss jetzt nicht sofort erklärt werden, aber jedenfalls sollten wir uns mit den projektiven und injektiven Objekten in unseren Standardbeispielen von abelschen Kategorien vertraut machen.

Beispiel 9.21. Es ist ziemlich klar, dass jeder freie R-Linksmodul projektiv ist in der abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ der R-Linksmoduln. Etwas allgemeiner: jeder direkte Summand von einem freien R-Linksmodul ist projektiv. Umgekehrt, sei M ein beliebiges projektives Objekt in $\mathcal{A}$. Wir können einen Epimorphismus $p\colon L \to M$ in $\mathcal{A}$ finden, bei dem L frei ist. Weil $\hom(M, -)$ Epimorphismen erhält, nach Voraussetzung, ist

$$\hom(M, L) \to \hom(M, M)$$

(gegeben durch $f \mapsto p \circ f$) surjektiv. Also gibt es einen Morphismus $f\colon M \to L$ mit der Eigenschaft $pf = \mathrm{id}_M$. Das heisst, dass M direkter Summand von L ist.

Definition 9.22. Man sagt, dass eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ *genügend viele projektive Objekte* hat, wenn zu jedem Objekt y von $\mathcal{A}$ ein Epimorphismus $x \to y$ in $\mathcal{A}$ existiert, bei dem x projektiv ist. Analog dazu: $\mathcal{A}$ hat *genügend viele injektive Objekte*, wenn zu jedem Objekt x von $\mathcal{A}$ ein Monomorphismus $x \to y$ in $\mathcal{A}$ existiert, bei dem y ein injektives Objekt ist.

Bemerkung 9.23. Die Kategorie der R-Linksmoduln hat genügend viele projektive Objekte (wie wir schon gesehen haben ... weil es freie R-Moduln gibt). Sie hat auch genügend viele injektive Objekte, wie wir noch sehen werden.

Die Kategorie der Garben auf einem topologischen Raum X mit Werten in der Kategorie der R-Linksmoduln hat im Allgemeinen nicht genügend viele projektive Objekte (denke ich). Sie hat aber genügend viele injektive Objekte, wie wir sehen werden.

Beispiel 9.24. Sei N ein injektives Objekt der abelschen Kategorie $\mathcal{C}$ bestehend aus den R-Linksmoduln. Sei $z \in X$, wobei X topologischer Raum, und sei $\mathcal{W}$ die Wolkenkratzergarbe am Punkt z mit $\mathcal{W}_z = N$. (Das heisst, $\mathcal{W}(U) = N$ falls $z \in U$ und $\mathcal{W}(U) = 0$ sonst! Etwas neue Definition übrigens, weil die leere Menge nicht als R-Linksmodul zugelassen ist.) Dann ist $\mathcal{W}$ ein injektives Objekt von $\mathbf{Sh}(X; \mathcal{C})$.

Beweis: Sei $\mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ eine kurze exakte Folge in $\mathbf{Sh}(X; \mathcal{C})$. Dann ist das dadurch bestimmte Diagramm

$$\hom(\mathcal{E}, \mathcal{W}) \leftarrow \hom(\mathcal{F}, \mathcal{W}) \leftarrow \hom(\mathcal{G}, \mathcal{W})$$

gleichbedeutend mit (isomorph zu)

$$\hom_{\mathcal{C}}(\mathcal{E}_z, N) \leftarrow \hom_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}_z, N) \leftarrow \hom_{\mathcal{C}}(\mathcal{G}_z, N)$$

weil Wolkenkratzergarben nunmal diese besondere Eigenschaft haben. Dieses letztere Diagramm ist aber kurz exakt, denn $\mathcal{E}_z \to \mathcal{F}_z \to \mathcal{G}_z$ ist kurz exakt nach Beispiel 9.19, und N ist injektiv.

10. Kettenkomplexe und Auflösungen

Sei $\mathcal{C}$ die abelsche Kategorie der R-Linksmoduln, bis auf Weiteres.

Lemma 10.1. *Ein Objekt M von $\mathcal{C}$ ist genau dann injektiv, wenn für jeden Links-Untermodul $J \subset R$ und jeden R-Homomorphismus*

$$f\colon J \to M$$

ein R-Homomorphismus $g\colon R \to M$ existiert mit $g|_J = f$. (Anders ausgedrückt: ... wenn $x \in M$ existiert derart, dass $f(a) = ax$ für alle $a \in J \subset R$. Denn g ist bestimmt durch $g(1) =: x$.)

Beweis. Benutzt Zorns Lemma. Gedanke: Gegeben Morphismus $u\colon K \to M$ und Inklusion $K \to L$. Wir suchen $w\colon L \to M$ mit $w|_K = u$. Im Hinblick auf Zorn betrachten wir partielle Erweiterungen, also Paare (E, v) mit $K \subset E \subset L$ und $v\colon E \to M$ so dass $v|_K = u$. Es gibt nach Zorn ein maximales Element (E, v). Angenommen $E \neq L$. Wähle $x \in L \smallsetminus E$. Sei $J \subset R$ der Kern vom Morphismus $R \to L/E$ gegeben durch $a \mapsto ax$. Definiere $f\colon J \to M$ als $a \mapsto v(ax)$. Finde R-Homomorphismus $g\colon R \to M$ mit $g|_J = f$. Dann haben wir Erweiterung von v auf $E + Rx \subset L$. Also war (E, v) nicht maximal ... □

Beispiel 10.2. $R = \mathbb{Z}$; wir reden also von injektiven abelschen Gruppen. Beispiele sind $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Nach Lemma oben: eine abelsche Gruppe M ist genau dann injektiv, wenn für jede ganze Zahl $z \neq 0$ die Multiplikation mit z ein *surjektiver* Homomorphismus von M nach M ist. Wort: *divisible.*

Satz 10.3. *$\mathcal{C}$ hat genug injektive Objekte, das heisst, zu jedem L in $\mathcal{C}$ existiert Mono $L \to M$ mit injektivem Modul M.*

Beweis. Benutzt sehr ernsthaft transfinite Induktion. Wir wählen erst eine Kardinalzahl α, so dass jeder Links-Untermodul von R eine Erzeugendenmenge mit Kardinalität $< \alpha$ besitzt. Dann wählen wir eine wohlgeordnete Menge S mit den folgenden Eigenschaften.

(i) Jede Teilmenge T von S, deren Kardinalität kleiner als α ist, hat eine obere Schranke in S.
(ii) Es gibt kein maximales Element in S.

(Existenz einer solchen wohlgeordneten Menge: wahrscheinlich Übungsaufgabe. Sehr bildend. Ein paar lächerliche Beispiele weiter unten. Wir bemerken übrigens, dass S nicht leer ist, weil $\alpha \geq 2$ ist.) Wir wollen jetzt induktiv R-Linksmoduln L_s bestimmen für $s \in S$, und zwar so, dass

$$L_s \subset L_t$$

(als Untermodul) falls $s < t$; ausserdem natürlich $L_\mu = L$ für das minimale Element μ von S.

Wenn $s \in S$ einen Vorgänger $r \in S$ besitzt (wenn also s das kleinste Element von S ist, das $> r$ ist), dann konstruieren wir L_s aus L_r in der folgenden naheliegenden Weise: es ist das Pushout von

$$L_r \longleftarrow \bigoplus_{(J,f)} J \hookrightarrow \bigoplus_{(J,f)} R$$

wobei (J, f) Paare bezeichnet bestehend aus Links-Untermodul J von R und R-Homomorphismus $f\colon J \to L_r$. Wenn $s \in S$ keinen Vorgänger besitzt (und auch nicht das kleinste Element von S ist), dann setzen wir

$$L_s := \bigcup_{r<s} L_r \,.$$

Fertig. Jetzt definieren wir noch

$$M = \bigcup_{s \in S} L_s .$$

Es bleibt zu zeigen, dass M ein injektiver Modul ist. Dafür haben wir das Kriterium von Lemma 10.1. Sei also $J \subset R$ ein Links-Untermodul und $f \colon J \to M$ ein R-Homomorphismus. Wir können eine Erzeugendenmenge für J wählen mit $< \alpha$ Elementen, und für jeden dieser Erzeugenden x ein $s \in S$, so dass $f(x) \in L_s$; für die so ausgewählten $s \in S$ haben wir eine gemeinsame obere Schranke $b \in S$, und damit wissen wir, dass $f(J) \subset L_b$. Da S kein maximales Element hat, muss b einen Nachfolger c in S haben (das kleinste Element von S, das $> b$ ist). Aus der Konstruktion von L_c ist klar, dass $f \colon J \to L_b \subset M$ sich fortsetzen lässt zu einem R-Homomorphismus $R \to L_c \subset M$. □

Beispiel 10.4. Im Fall $R = \mathbb{Z}$ können wir $\alpha = 2$ wählen. Für S können wir dann $\mathbb{N}$ wählen; billiger geht es kaum, schon weil wir in S kein maximales Element haben dürfen.

Wenn jeder Links-Untermodul von R endlich erzeugt ist, dann können wir für α die Kardinalität von $\mathbb{N}$ nehmen, und für S können wir wieder $\mathbb{N}$ nehmen.

Korollar 10.5. (R. Godement, wahrscheinlich.) *In der abelschen Kategorie* $\mathbf{Sh}(X;\mathcal{C})$ *gibt es genug injektive Objekte.*

Beweis. Für jedes $x \in X$ und injektiven R-Linksmodul M gibt es die Wolkenkratzergarbe $\mathcal{W} = \mathcal{W}(x, M)$ mit der Eigenschaft $\mathcal{W}(U) = M$ falls $x \in U$ und $\mathcal{W}(U) = 0$ sonst. Der Halm bei x ist M, alle anderen Halme sind 0. Wir haben schon bewiesen, dass $\mathcal{W}(x, M)$ ein injektives Objekt von $\mathbf{Sh}(X;\mathcal{C})$ ist.

Sei jetzt $\mathcal{F}$ ein beliebiges Objekt von $\mathbf{Sh}(X;\mathcal{C})$. Für jedes $x \in X$ können wir einen Monomorphismus $e_x \colon \mathcal{F}_x \longrightarrow M_x$ in $\mathcal{C}$ wählen mit injektivem Modul M_x. Dann haben wir einen Morphismus in $\mathbf{Sh}(X;\mathcal{C})$ von der Form

$$\mathcal{F} \longrightarrow \prod_{x \in X} \mathcal{W}(x, M_x)$$

(die Komponente $\mathcal{F} \to \mathcal{W}(x, M_x)$ ist adjungiert zu $\mathcal{F}_x \to M_x$ unter der Adjunktion von *Halm bei* x mit *Wolkenkratzer bei* x). Es ist ein Monomorphismus nach unseren Halm-Kriterien, denn die induzierte Abbildung der Halme bei $x \in X$ ist $e_x \colon \mathcal{F}_x \to M_x$, ein Monomorphismus nach Konstruktion. Ausserdem ist $\prod_{x \in X} \mathcal{W}(x, M_x)$ injektiv, denn es ist leicht zu sehen, dass ein Produkt von injektiven Objekten wieder injektiv ist. □

Bemerkung 10.6. Sei c ein Objekt in einer abelschen Kategorie $\mathcal{C}$. Grothendieck nennt einen Monomorphismus $c \to d$ in $\mathcal{C}$ mit injektivem Objekt d ein *effacement injectif* von c. Ebenso nennt er einen Epimorphismus $b \to c$ mit projektivem Objekt b ein *effacement projectif* von c. Dabei heisst *effacement* so etwas wie *Ausradierung.* Leider ist mir nicht bekannt, was die gängige Übersetzung davon ins Englische oder Deutsche ist.

Es gibt manchmal/oft so etwas wie minimale Ausradierungen, aber meistens sind sie für kategorische Zwecke nicht eindeutig genug. Hier sind ein paar sehr einfache Beispiele. Sei $\mathcal{C}$ die abelsche Kategorie der abelschen Gruppen. In $\mathcal{C}$ gibt es genau einen Monomorphismus $f \colon \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Hier ist $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ injektiv, also handelt es sich bei f um ein *effacement injectif* von $\mathbb{Z}/2$. Als solches ist f wohl auch *minimal*, intuitiv gesagt, aber trotzdem gibt es viele

Homomorphismen g von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft $gf = f$ (und $g \neq \mathrm{id}$). Einer davon ist sogar ein Automorphismus: $g(x) = -x$. Ähnliches kann gesagt werden über den eindeutigen Epimorphismus $p\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2$, der ein *effacement projectif* von $\mathbb{Z}/2$ ist.

* * *

Wir arbeiten in einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$. Ein *Kettenkomplex* in $\mathcal{A}$ ist eine Folge oder Familie von Objekten C_j mit $j \in \mathbb{Z}$, zusammen mit Morphismen $d_j\colon C_j \to C_{j-1}$, die die Bedingung $d_j d_{j+1} = 0$ erfüllen für alle $j \in \mathbb{Z}$. Dafür kann man kurz schreiben (C, d). Überhaupt schreibt man oft d statt d_j.

Ein *Kettenmorphismus* von einem Kettenkomplex (C, d) in einen anderen, (C', d'), ist eine Folge von Morphismen $f_j\colon C_j \to C'_j$, die $d'_j f_j = f_{j-1} d_j$ erfüllen für alle $j \in \mathbb{Z}$.

Das *Homologie*-Objekt $H_j(C, d)$ von einem Kettenkomplex (C, d) ist (genügend) charakterisiert durch kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & C_{j+1} \arrow[d] \arrow[dr, "d"] & & \\
0 \arrow[r] & Z_j \arrow[r] \arrow[d] & C_j \arrow[r, "d"] & C_{j-1} \\
 & H_j(C,d) \arrow[d] & & \\
 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

in dem die waagerechte 3erfolge und die senkrechte 3erfolge exakt sind. (Der Monomorphismus $Z_j \to C_j$ im Diagramm darf gerne $\ker(d_j)$ genannt werden.) Diese Konstruktion ist funktoriell, das heisst, eine Kettenmorphismus f von (C, d) nach (C', d') induziert einen Morphismus $H_j(C, d) \to H_j(C', d')$. Etwas genauer gesagt, obiges Diagramm für (C, d) und ein analoges Diagramm für (C', d') können in ein grösseres kommutatives Diagramm eingepasst werden, in dem auch noch die Morphismen f_{j+1}, f_j, f_{j-1} Platz finden, mitsamt (eindeutig bestimmten) Morphismen $Z_j \to Z'_j$ und $H_j(C, d) \to H_j(C', d')$.

Zwei Kettenmorphismen $f, g\colon (C, d) \to (C', d')$ sind (zueinander) *kettenhomotop*, wenn eine Folge von Morphismen $h_i\colon C_i \to C'_{i+1}$ existiert mit $d'_{i+1} h_i + h_{i-1} d_i = g - f$. Die Folge $(h_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ ist dann eine *Kettenhomotopie* von f nach g. Es ist leicht zu sehen, dass *kettenhomotop* eine Äquivalenzrelation ist auf der Menge der Kettenmorphismen von (C, d) nach (C', d'). Die Äquivalenzklassen heissen Kettenhomotopieklassen. Bezeichnung: $[f]$ für die Kettenhomotopieklasse von f. Ausserdem bilden die Kettenhomotopieklassen eine abelsche Gruppe:

$$[f] + [g] = [f + g]$$

(ist wohldefiniert).

Ausserdem ist Zusammensetzung von Kettenhomotopieklassen sinnvoll. Das heisst, wenn $f, g\colon (C,d) \to (C',d')$ kettenhomotop sind und wenn $p, q\colon (C',d') \to (C'',d'')$ kettenhomotop sind, dann sind zB auch pf und qg zueinander kettenhomotop. Also sind wir berechtigt, $[p] \circ [f] := [p \circ f]$ zu definieren. Diese Zusammensetzung ist bi-additiv.

Gut zu wissen: wenn zwei Kettenmorphismen $f, g\colon (C,d) \to (C',d')$ kettenhomotop (zueinander) sind, dann induzieren sie denselben Morphismus $H_j(C,d) \to H_j(C',d')$, für jedes $j \in \mathbb{Z}$.

Eine Kettenmorphismus $f\colon (C,d) \to (C',d')$ heisst *Kettenhomotopieäquivalenz*, wenn es einen Kettenmorphismus $g\colon (C',d') \to (C,d)$ gibt derart, dass gf und fg kettenhomotop zu den jeweiligen Identitäts-Kettenmorphismen sind. Wenn das der Fall ist, dann induziert f Isomorphismen $H_j(C,d) \to H_j(C',d')$ für alle $j \in \mathbb{Z}$.

Ein *Ko-Kettenkomplex* in $\mathcal{A}$ ist eine Folge/Familie von Objekten C^j mit $j \in \mathbb{Z}$, zusammen mit Morphismen $d^j\colon C^j \to C^{j+1}$, die die Bedingung $d_j d_{j-1} = 0$ erfüllen für alle $j \in \mathbb{Z}$. Natürlich kann man einen Kokettenkomplex (C,d) als Kettenkomplex $(\bar{C},\bar{d})$ auffassen, indem man die Indizierung ändert: also $\bar{C}_j := C_{-j}$ und $\bar{d}_j = d^{-j}$. In diesem Sinne schreiben wir $H^j(C,d)$ (Kohomologie von Kokettenkomplex) und meinen damit $H_{-j}(\bar{C},\bar{d})$.

Deswegen ist die Theorie der Kokettenkomplexe weitgehend identisch mit der Theorie der Kettenkomplexe. Kokettenkomplexe sind eher üblich in der algebraischen Geometrie, Kettenkomplexe mehr in der algebraischen Topologie.

Definition 10.7. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und b ein Objekt von $\mathcal{A}$. Eine *projektive Auflösung* von b besteht aus einem Kettenkomplex (C,d) in $\mathcal{A}$ und einem Epimorphismus $p\colon C_0 \to b$ mit den folgenden Eigenschaften:

$C_j = 0$ für $j < 0$;
$H_j(C,d) = 0$ falls $j \neq 0$;
$\ker(p) = \operatorname{im}(d_1\colon C_1 \to C_0)$.

(In der letzten Bedingung sollten beide Seiten als Monomorphismen mit Ziel C_0 gelesen werden; die Gleichheit bedeutet, dass ein kommutatives Dreieck existiert ... wie das Dreieck in Definition 9.12.)

Eine *injektive Auflösung* von b besteht aus einem Kokettenkomplex (C,d) in $\mathcal{A}$ und einem Monomorphismus $e\colon b \to C^0$ mit den folgenden Eigenschaften:

$C^j = 0$ für $j < 0$;
$H^j(C,d) = 0$ falls $j \neq 0$;
$\operatorname{im}(e) = \ker(d^0\colon C^0 \to C^1)$.

Lemma 10.8. *Wenn $\mathcal{A}$ genügend viele Projektive hat, dann besitzt jedes Objekt b in $\mathcal{A}$ eine projektive Auflösung. Wenn $\mathcal{A}$ genügend viele Injektive hat, dann besitzt jedes Objekt b in $\mathcal{A}$ eine injektive Auflösung.*

Beweis. Es genügt, den ersten Fall zu betrachten (projektive Auflösung). Wir wählen zuerst ein projektives Objekt C_0 und einen Epi $p\colon C_0 \to b$. Dann fahren wir induktiv fort: wenn

$$C_j \xrightarrow{d_j} C_{j-1} \xrightarrow{d_{j-1}} C_{j-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

schon konstruiert ist, dann haben wir einen Monomorphismus

$$Z_j \xrightarrow{\ker d_j} C_j \,.$$

Wir wählen einen Epimorphismus $C_{j+1} \to Z_j$ mit projektivem C_{j+1} und definieren d_{j+1} als die Zusammensetzung

$$C_{j+1} \to Z_j \to C_j \,.$$

Damit ist die Existenz einer projektiven Auflösung von b gezeigt. □

Lemma 10.9. *Gegeben projektive Auflösung* (C, d, p) *von* b*, und projektive Auflösung* (C', d', p') *von* b'*. Zu jedem Morphismus* $g \colon b \to b'$ *existiert eine Kettenabbildung*

$$f \colon (C, d) \to (C', d')$$

mit $p' f_0 = gp$*. Sie ist eindeutig bis auf Kettenhomotopie.*

Gegeben injektive Auflösung (C, d, e) *von* b*, und injektive Auflösung* (C', d', e') *von* b'*. Zu jedem Morphismus* $g \colon b \to b'$ *existiert eine Kettenabbildung* $f \colon (C, d) \to (C', d')$ *mit* $f_0 e = e' g$*. Sie ist eindeutig bis auf Kettenhomotopie.*

Beweis. Es genügt, den Fall mit den projektiven Auflösungen zu behandeln. Wir müssen die gestrichelten vertikalen Pfeile in einem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_3 \arrow[r, "d_3"] \arrow[d, dashed, "f_3"] & C_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, dashed, "f_2"] & C_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, dashed, "f_1"] & C_0 \arrow[r, "p"] \arrow[d, dashed, "f_0"] & b \arrow[d, "g"] \\
\cdots \arrow[r] & C'_3 \arrow[r, "d'_3"] & C'_2 \arrow[r, "d'_2"] & C'_1 \arrow[r, "d'_1"] & C'_0 \arrow[r, "p'"] & b'
\end{tikzcd}$$

finden. Den Pfeil f_0 können wir finden, weil C_0 projektiv ist und p' epi ist. Wenn $f_0, f_1, \ldots, f_j$ schon gefunden sind, dann finden wir f_{j+1} wie folgt. Wir schreiben d'_{j+1} als Zusammensetzung von Epimorphismus $C'_{j+1} \to B'_j$ und Monomorphismus

$$\operatorname{im}(d'_{j+1}) \colon B'_j \to C'_j \,.$$

Weil $d'_j f_j d_{j+1} = f_{j-1} d_j d_{j+1} = 0$ (für $j = 0$ besser $p' f_0 d_1 = gpd_1 = 0$) können wir auch $f_j d_{j+1}$ als Zusammensetzung

$$C_{j+1} \longrightarrow B'_j \xrightarrow{\operatorname{im}(d'_{j+1})} C'_j$$

schreiben. Dann finden wir f_{j+1} als Füller in einem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
C_{j+1} \arrow[rr, "d_{j+1}"] \arrow[d, dashed, "f_{j+1}"'] \arrow[dr] & & C_j \arrow[d, "f_j"] \\
C'_{j+1} \arrow[r, two heads] & B'_j \arrow[r, "\operatorname{im}(d'_{j+1})"'] & C'_j
\end{tikzcd}$$

(weil C_{j+1} projektiv ist).

Für die Eindeutigkeit bis auf Kettenhomotopie genügt es zu zeigen, dass f kettenhomotop zu Null ist, wenn $g = 0$. Wir haben also jetzt folgende Situation: kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_3 \arrow[r, "d_3"] \arrow[d, "f_3"] & C_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "f_2"] & C_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "f_1"] & C_0 \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f_0"] & b \arrow[d, "0"] \\
\cdots \arrow[r] & C'_3 \arrow[r, "d'_3"] & C'_2 \arrow[r, "d'_2"] & C'_1 \arrow[r, "d'_1"] & C'_0 \arrow[r, "p'"] & b'
\end{tikzcd}$$

Gesucht werden $h_i\colon C_i \to C'_{i+1}$ für $i \geq 0$ mit $d'_{i+1}h_i + h_{i-1}d_i = f_i$ (für $i = 0$ einfach $d'_1 h_0 = f_0$). Wir faktorisieren wie vorher d'_{j+1} als Mono gefolgt auf Epi,

$$C_{j+1} \to B'_j \to C'_j\,.$$

Wir finden h_0 als Füller in einem (kommutativen) Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & C_0 \arrow[dl, dotted, "h_0"'] \arrow[d] \arrow[dr, "f_0"] & \\
C'_1 \arrow[r, two heads] & B'_0 \arrow[r] & C'_0
\end{tikzcd}$$

Wenn $h_0, h_1, \ldots, h_{j-1}$ schon gefunden sind (jetzt $j \geq 1$), und ausserdem $d'_j(f_j - h_{j-1}d_j) = 0$, dann finden wir h_j als Füller von

$$\begin{tikzcd}
 & C_j \arrow[dl, dotted, "h_j"'] \arrow[d] \arrow[dr, "f_j - h_{j-1}d_j"] & \\
C'_{j+1} \arrow[r, two heads] & B'_j \arrow[r] & C'_j
\end{tikzcd}$$

(Der vertikale Pfeil ist eindeutig und existiert, weil wir eben vorausgesetzt haben, dass $d'_j(f_j - h_{j-1}d_j) = 0$.) Es gilt wieder

$$d'_{j+1}(f_{j+1} - h_j d_{j+1}) = (f_j - d'_{j+1}h_j)d_{j+1} = (f_j - f_j + h_{j-1}d_j)d_{j+1} = 0,$$

so dass wir die Induktion fortsetzen können. □

Korollar 10.10. *Eine projektive Auflösung von b ist eindeutig bis auf eindeutige Homotopieäquivalenz.*

Beweis. Wir denken uns zwei projektive Auflösungen (C, d, p) und (C', d', p') von b. Wir wenden das vorige Lemma an mit $g = \mathrm{id}_b$. Demnach gibt es eine Kettenabbildung $f\colon (C, d) \to (C', d')$ mit $p'f_0 = p$, und eine weitere Kettenabbildung $f'\colon (C', d') \to (C, d)$ mit $pf'_0 = p'$. Die Homotopieklassen $[f]$ und $[f']$ sind eindeutig. Ausserdem gilt $[f'f] = [\mathrm{id}]$ und $[ff'] = [\mathrm{id}]$; also sind f und f' Homotopieäquivalenzen. □

11. Abgeleitete Funktoren

Definition 11.1. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genügend vielen Projektiven. Sei $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein rechtsexakter (additiver) Funktor, wobei $\mathcal{B}$ ebenfalls eine abelsche Kategorie ist. Die links-abgeleiteten Funktoren von F sind definiert durch

$$L_j F(a) := H_j(F(P(a)))$$

für $j \in \mathbb{Z}$, wobei a für ein Objekt von $\mathcal{A}$ steht und $P(a)$ eine (beliebig gewählte) projektive Auflösung von a bezeichnet.

Ein paar Kommentare dazu. Die Anweisungen sind so: gegeben a, wähle projektive Auflösung $P(a)$ (ein Kettenkomplex in $\mathcal{A}$), wende F darauf an (das Resultat ist ein Kettenkomplex $F(P(a))$ in $\mathcal{B}$) und bilde die Homologieobjekte $H_j(F(P(a))$ davon (Objekte von $\mathcal{B}$). Die Wahl $a \mapsto P(a)$ ist zwar strenggenommen kein Funktor, aber wir haben gesehen, dass $P(a)$ eindeutig ist bis auf eindeutige Kettenhomotopieäquivalenz, und dass jeder Morphismus $a \to a'$ in $\mathcal{A}$ eine Kettenabbildung $P(a) \to P(a')$ bis auf Kettenhomotopie bestimmt. Dann ist auch $F(P(a))$ eindeutig bis auf eindeutige Kettenhomotopieäquivalenz, und jeder Morphismus $b \to b'$ in $\mathcal{A}$ induziert eine Kettenabbildung $F(P(b)) \to F(P(b'))$, wohlbestimmt bis auf Kettenhomotopie. Damit sind die induzierten Morphismen $H_j(F(P(b))) \to H_j(F(P(b')))$ eindeutig bestimmt. Auf diese Weise haben wir einen Funktor L_jF.

Es ist klar, dass $L_jF(a) = 0$ für $j < 0$ bei beliebigem a. Ausserdem gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$L_0F(a) \cong F(a)\,.$$

Das hat damit zu tun, dass F rechtsexakt ist. Denn die exakte Folge

$$P(a)_1 \to P(a)_0 \to a \to 0$$

bestimmt eine exakte Folge

$$F(P(a)_1) \to F(P(a)_0) \to F(a) \to 0$$

so dass wir $H_0(F(P(a))$ mit $F(a)$ identifizieren können.

Definition 11.2. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genügend vielen Injektiven. Sei $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein linksexakter (additiver) Funktor, wobei $\mathcal{B}$ ebenfalls eine abelsche Kategorie ist. Die rechts-abgeleiteten Funktoren von F sind definiert durch

$$R_jF(a) := H^j(F(I(a)))$$

für $j \in \mathbb{Z}$, wobei a für ein Objekt von $\mathcal{A}$ steht und $I(a)$ eine (beliebig gewählte) injektive Auflösung von a bezeichnet.

In dieser Definition werden $I(a)$ und $F(I(a))$ als Kokettenkomplexe aufgefasst; daher schreiben wir $H^j(F(I(a)))$.

Beispiel 11.3. Sei $\mathcal{A}$ die abelsche Kategorie der Linksmoduln über einem Ring R (fest gewählt). Sei M ein R-Rechtsmodul. Dann haben wir einen rechtsexakten Funktor F von $\mathcal{A}$ nach **abGrp** durch $F(N) = M \otimes_R N$. Statt $L_jF(N)$ schreibt man meistens

$$\mathrm{Tor}_j^R(M, N).$$

Um es noch spezieller zu machen: sei $R = \mathbb{Z}[G]$ ein Gruppenring (also G eine Gruppe). Ein $\mathbb{Z}[G]$-Modul N ist dann dasselbe wie eine abelsche Gruppe N mit einer Wirkung von G (also Homomorphismus von G in die Automorphismengruppe von N). Sei M der ganz spezielle $\mathbb{Z}[G]$-Rechtsmodul bestehend aus $\mathbb{Z}$ mit der trivialen (rechten) Wirkung von G. Dann schreibt man gerne

$$\mathrm{Tor}_j^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, N) =: H_j(G; N)$$

und nennt es *Gruppenhomologie* (genauer, Homologie der Gruppe G mit Koeffizienten in Modul N). Das ist übrigens nicht sehr systematisch; ich ziehe die Tor-Notation vor.

Beispiel 11.4. Sei wieder $\mathcal{A}$ die abelsche Kategorie der Linksmoduln über einem Ring R (fest gewählt). Sei N ein fest gewählter R-Linksmodul. Dann haben wir einen rechtsexakten Funktor F von $\mathcal{A}$ nach $\mathbf{abGrp}^{\mathrm{op}}$ durch $F(M) = \hom_R(M,N)$. Statt $L_jF(N)$ schreibt man meistens

$$\mathrm{Ext}^R_j(M,N).$$

Übrigens kann man hier auch sagen: F ist ein linksexakter Funktor von $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ nach $\mathbf{abGrp}$. Dann muss man, um konsequent zu sein, $\mathrm{Ext}^R_j(M,N)$ als $R_jF(M)$ definieren. (Es wird tatsächlich oft so gemacht. Vielleicht überwiegend. Es bedeutet aber dasselbe. Lästig ist hier übrigens, dass wir das R in der Bedeutung von "rechtsabgeleitet", aber auch in der Bedeutung von "Ring" benutzen.)

Um es noch spezieller zu machen: sei $R = \mathbb{Z}[G]$ ein Gruppenring (also G eine Gruppe). Sei M der ganz spezielle $\mathbb{Z}[G]$-Rechtsmodul bestehend aus $\mathbb{Z}$ mit der trivialen (linken) Wirkung von G. Dann schreibt man gerne

$$\mathrm{Ext}^{\mathbb{Z}G}_j(\mathbb{Z},N) =: H^j(G;N)$$

und nennt es *Gruppenkohomologie* (genauer, Kohomologie der Gruppe G mit Koeffizienten in Modul N).

Beispiel 11.5. Sei $R = \mathbb{Z}[G]$ wobei G eine zyklische Gruppe der (endlichen) Ordnung q ist, mit Erzeuger $T \in G$. Sei $U = 1 - T \in R$ und $V = 1 + T + T^2 + \cdots + T^{q-1} \in R$. Dann ist $UV = 0$ in R. Also können wir einen Kettenkomplex (C,d) bauen mit $C_j = R$ für $j \geq 0$, $C_j = 0$ für $j < 0$, und $d_j \colon C_j \to C_{j-1}$ gleich Multiplikation mit U falls $j > 0$ ungerade, Multiplikation mit V falls $j > 0$ gerade.

$$\cdots \longrightarrow R \xrightarrow{\cdot V} R \xrightarrow{\cdot U} R \xrightarrow{\cdot V} R \xrightarrow{\cdot U} R \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Dieser Kettenkomplex hat $H_j(C,d) = 0$ for $j \neq 0$ und $H_0(C,d) \cong \mathbb{Z}$. Es ist also eine projektive Resolution von $\mathbb{Z}$, wobei $\mathbb{Z}$ aufgefasst wird als Modul über $\mathbb{Z}[G]$ (triviale Wirkung von G). Auf diese Weise können wir leicht für jeden R-Modul N die abelschen Gruppen

$$\mathrm{Tor}^R_j(\mathbb{Z},N) = H_j(G;N), \qquad \mathrm{Ext}^R_j(\mathbb{Z},N) = H^j(G;N)$$

ausrechnen. Wir erhalten

$$\mathrm{Tor}^R_j(\mathbb{Z},N) = \begin{cases} \dfrac{\ker(\cdot U \colon N \to N)}{\mathrm{im}(\cdot T \colon N \to N)} & \text{wenn } j > 0, \text{ ungerade;} \\[2ex] \dfrac{\ker(\cdot V \colon N \to N)}{\mathrm{im}(\cdot U \colon N \to N)} & \text{wenn } j > 0, \text{ gerade;} \\[2ex] \mathrm{coker}(\cdot U \colon N \to N) & \text{wenn } j = 0; \\[1ex] 0 & \text{wenn } j < 0. \end{cases}$$

Ebenso

$$\mathrm{Ext}_j^R(\mathbb{Z},N)=\begin{cases}\dfrac{\ker(\cdot U\colon N\to N)}{\mathrm{im}(\cdot T\colon N\to N)} & \text{wenn } j>0, \text{ ungerade;}\\ \dfrac{\ker(\cdot V\colon N\to N)}{\mathrm{im}(\cdot U\colon N\to N)} & \text{wenn } j>0, \text{ gerade;}\\ \ker(\cdot U\colon N\to N) & \text{wenn } j=0;\\ 0 & \text{wenn } j<0.\end{cases}$$

Beispiel 11.6. Sei X ein topologischer Raum und R ein Ring, und $\mathcal{A}$ die abelsche Kategorie der R-Linksmoduln. Dann haben wir die abelsche Kategorie der Garben $\mathbf{Sh}(X;\mathcal{A})$ und auf dieser den Funktor Γ gegeben durch

$$\Gamma(\mathcal{F})=\mathcal{F}(X).$$

Dafür können wir übrigens auch $\hom(\mathcal{E},\mathcal{F})$ schreiben, wobei $\mathcal{E}$ die Vergarbung der konstanten Prägarbe $\mathcal{E}'$ mit konstantem Wert R ist (also $\mathcal{E}'(U)=R$ für alle offenen U). Auf jeden Fall ist Γ linksexakt als Funktor von $\mathbf{Sh}(X;\mathcal{A})$ nach **abGrp**. Da ausserdem $\mathbf{Sh}(X;\mathcal{A})$ genügend viele Injektive besitzt, können wir die rechts-abgeleiteten Funktoren $R_j\Gamma$ bilden. Man schreibt normalerweise

$$H^j(X;\mathcal{F})$$

statt $R_j\Gamma(\mathcal{F})$. Das ist die Garbenkohomologie (von X, mit Koeffizienten in Garbe $\mathcal{F}$ auf X). Wir sind natürlich noch ziemlich weit davon entfernt, Berechnungen anstellen zu können.

Zwischen den Linksabgeleiteten L_jF eines rechtsexakten Funktors F gibt es gewisse Beziehungen, nämlich in erster Linie die natürlichen Randhomomorphismen

$$L_jF(c)\to L_{j-1}F(a),$$

die definiert sind, wenn a und c durch eine kurze exakte Folge

$$0\to a\to b\to c\to 0$$

verbunden sind. Um diese zu konstruieren, müssen wir noch etwas mehr in die Wissenschaft der Kettenkomplexe einsteigen. Der Einfachheit halber schreibe ich jetzt $\ker_s$ und coker_t für Kerne und Kokerne im traditionellen Sinn (Dekoration s für *source* und Dejkoration t für *target*, denn $\ker_s(f)$ im traditionellen Sinn ist die Quelle vom Monomorphismus $\ker(f)$ im modernen Sinn, usw.).

Lemma 11.7. (Schlangenlemma, snake lemma.) *Gegeben ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] & C \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' & \end{tikzcd}$$

in einer abelschen Kategorie $\mathcal{C}$. Dann ergibt sich eine natürliche exakte Folge

$$\ker_s(a)\to\ker_s(b)\to\ker_s(c)\to\mathrm{coker}_t(a)\to\mathrm{coker}_t(b)\to\mathrm{coker}_t(a)\,.$$

Wenn ausserdem f mono ist, dann ist auch $\ker_s(a) \to \ker_s(b)$ *mono; wenn g' epi ist, dann ist auch* $\operatorname{coker}_t(b) \to \operatorname{coker}_t(c)$ *epi.*

Beweis. Bei Wikipedia wird das auf den Fall $\mathcal{A} = \mathbf{abGrp}$ zurückgeführt unter Hinweis auf einen Satz von Mitchell. Das finde ich aber etwas unsportlich. Also folgender Beweisaufbau als Alternative:

(i) Wir zeigen zuerst, dass $\ker_s(a) \to \ker_s(b) \to \ker_s(c)$ exakt ist. (Daraus ist eine Übungsaufgabe geworden.)

(ii) Wegen Symmetrie (Übergang zu $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$) folgt, dass auch

$$\operatorname{coker}_t(a) \to \operatorname{coker}_t(b) \to \operatorname{coker}_t(a)$$

exakt ist.

(iii) Alle Objekte im Diagramm sind ausgerüstet mit Morphismus nach C' (in verträglicher Weise). Wenn wir jedes Objekt X durch $\ker_s(X \to C')$ ersetzen und die Änderung durch "Tilden" andeuten, erhalten wir

$$\begin{tikzcd}
\ker_s(\tilde{a}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \ker_s(\tilde{b}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \ker_s(\tilde{c}) \arrow[d, "\cong"] \\
\ker_s(a) \arrow[r] & \ker_s(b) \arrow[r] & \ker_s(c)
\end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{coker}_t(\tilde{a}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \operatorname{coker}_t(\tilde{b}) \arrow[r] \arrow[d, "\text{mono}"] & \operatorname{coker}_t(\tilde{c})\ goo \arrow[d] \\
\operatorname{coker}_t(a) \arrow[r] & \operatorname{coker}_t(b) \arrow[r] & \operatorname{coker}_t(c)
\end{tikzcd}$$

Das bedeutet, dass sich (unter Berücksichtigung von Natürlichkeit und der Annahme, dass (i) und (ii) abgehakt sind) unsere Aufgabe nicht ändert, wenn wir diese Ersetzung machen. (Weitere Einzelheiten dazu in Bemerkung 11.8.) Also dürfen wir von jetzt an $C' = 0$ annehmen.

(iv) Alle Objekte im Diagramm sind ausgerüstet mit Morphismus von A (in verträglicher Weise). Mit einem Argument wie in (iii) können wir jedes Objekt X durch $\operatorname{coker}_t(A \to X)$ ersetzen. Also dürfen wir von jezt an $A = 0$ annehmen.

(iv) Im Fall $A = 0 = C'$ hat unser kommutatives Diagramm die Form

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d, "a"] & B \arrow[r, "g", "\cong"'] \arrow[d, "b"] & C \arrow[d, "c"] \\
A' \arrow[r, "f'", "\cong"'] & B' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dann ist die Lösung klar. Zum Beispiel wird $\ker(c) \cong C$ und $\operatorname{coker}(a) \cong A'$ und der lang gesuchte Morphismus von $\ker(c)$ nach $\operatorname{coker}(a)$ kann daher als $(f')^{-1}bg^{-1}$ definiert werden.

□

Bemerkung 11.8. In Schritt (iii) wurde Folgendes ohne Beweis benutzt.

(a) Gegeben kommutatives Diagramm in abelscher Kategorie

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ A_1 \arrow[r] \arrow[d] & B_1 \arrow[r] \arrow[d] & C_1 \arrow[d] \\ A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] \\ Z \arrow[r, equal] & Z \arrow[r, equal] & Z \end{tikzcd}$$

mit exakten Spalten. Wenn die Zeile $A \to B \to C$ exakt ist, dann auch die Zeile $A_1 \to B_1 \to C_1$; wenn $A \to B$ mono ist, dann auch $A_1 \to B_1$; wenn $B \to C$ epi ist, dann auch $B_1 \to C_1$.

(b) Gegeben kommutatives Diagramm in abelscher Kategorie

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\ B_1 \arrow[r] \arrow[d] & C_1 \arrow[r] \arrow[d] & D_1 \arrow[r] & 0 \\ B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] & 0 \\ Z \arrow[r, equal] & Z & & \end{tikzcd}$$

mit exakten Spalten und Zeilen. Dann ist der induzierte Morphismus $D_1 \to D$ ein Monomorphismus.

Beide Aussagen sind in der Kategorie der abelschen Gruppen (oder in der Kategorie der R-Linksmoduln) ziemlich klar. (Das nützt uns aber nur wenig.) Die Beweise werden vielleicht noch nachgetragen! Vielleicht.

Korollar 11.9. *Sei* $0 \to A \to B \to C \to 0$ *ein kurzes exaktes Diagramm von Kettenkomplexen in einer abelschen Kategorie. Dadurch wird eine lange exakte Folge von Homologieobjekten bestimmt:*

$$\cdots \longrightarrow H_j(A) \longrightarrow H_j(B) \longrightarrow H_j(C) \xrightarrow{\partial} H_{j-1}(A) \longrightarrow H_{j-1}(B) \longrightarrow \cdots$$

Beweis. Wir bezeichnen die Differentiale mit d^A, d^B und d^C. Das Schlangenlemma kann auf folgende Situation angewendet werden,

$$\begin{tikzcd} & \operatorname{coker}_t(d^A_{j+2}) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker}_t(d^B_{j+2}) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker}_t(d^C_{j+2}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \ker_s(d^A_j) \arrow[r] & \ker_s(d^B_j) \arrow[r] & \ker_s(d^C_j) & \end{tikzcd}$$

wobei die vertikalen Pfeile durch d^A_{j+1}, d^B_{j+1} und d^C_{j+1} induziert sind. □

Beispiel 11.10. Es gibt einen wichtigen Fall, in dem man die lange exakte Folge der Homologieobjekte leichter verstehen kann, also zB ohne Schlangenlemma. Sei wieder

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \longrightarrow 0$$

ein kurzes exaktes Diagramm von Kettenkomplexen in einer abelschen Kategorie. Diesmal soll zusätzlich angenommen werden, dass das Diagramm in jedem Grad spaltet (d.h., es existieren Morphismen

$$s_j \colon C_j \to B_j$$

mit $v_j s_j = \mathrm{id} \cong C_j \to C_j$). Dann dürfen wir schreiben $B_j \cong A_j \oplus C_j$. Unter Benutzung dieser Spaltung können wir das Differential d^B in Form einer 2×2-Matrix beschreiben:

$$d^B = \begin{bmatrix} d^A & g \\ 0 & d^C \end{bmatrix}$$

(der Eintrag 0 links unten drückt aus, dass A ein "Unterkomplex" von B ist). Demnach ist

$$0 = d^B d^B = \begin{bmatrix} d^A d^A & g d^C + d^A g \\ 0 & d^C d^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & g d^C + d^A g \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

also $g d_C = -d^A g$. Das sieht aus wie die Bedingung für einen Kettenmorphismus von C nach A; nur ist da das Vorzeichen -1 und die Tatsache, dass g die Graduierung um 1 herabsetzt. Man sagt, dass g eine Kettenabbildung vom Grad -1 ist. So ein Ding induziert natürlich auch Morphismen der Homologieobjekte, hier $H_j(C) \to H_{j-1}(A)$. Das sind die Randmorphismen, die wir vorher aus dem Schlangenlemma herleiten mussten. (Beweis dieser Behauptung wird LeserIn überlassen. Sollte nicht furchtbar schwer sein.)

Wichtig: die Kettenabbildung g (vom Grad -1) hängt leider von unserer Wahl der Spaltungen s_j ab. Wenn wir andere Spaltungen $s'_j \colon C_j \to B_j$ wählen, erhalten wir vielleicht eine andere Kettenabbildung g'. Wie hängen g und g' zusammen? Wir stellen fest, dass $s'_j - s_j$ als Morphismus $t_j \colon C_j \to A_j$ geschrieben werden kann. Wir erhalten

$$g' - g = d^A t - t d^C \qquad \left(g'_j - g_j = d^A t_j - t_{j-1} d^C\right)$$

womit ausgedrückt ist, dass g und g' kettenhomotop sind (als Kettenabbildungen vom Grad -1). Daraus folgt, dass sie dieselben Morphismen $H_j(C) \to H_{j-1}(A)$ induzieren.

Jetzt endlich zu einer zentralen Aussage angehend die links-abgeleiteten Funktoren eine rechtsexakten Funktors (nicht ganz klar, ob Satz oder Definition):

Satz 11.11. *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genügend vielen Projektiven und sei $F \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein rechts-exakter Funktor in eine andere abelsche Kategorie. Jede kurze exakte Folge*

$$0 \to a \to b \to c \to 0$$

in $\mathcal{A}$ bestimmt in natürlicher Weise Morphismen $\partial \colon L_j F(c) \to L_{j-1} F(a)$, die zusammen mit den durch $a \to b$ und $b \to c$ induzierten Morphismen eine lange exakte Folge ergeben ($j \in \mathbb{Z}$):

$$\cdots \longrightarrow L_{j+1}F(c) \xrightarrow{\partial} L_j F(a) \longrightarrow L_j F(b) \longrightarrow L_j F(c) \xrightarrow{\partial} L_{j-1} F(a) \longrightarrow \cdots$$

Beweis. (Skizze.) Es fängt damit an, dass eine kurze exakte Folge $a \to b \to c$ eigentlich schon durch den Monomorphismus $a \to b$ bestimmt ist (denn der andere Morphismus ist einfach der Kokern davon). Wir können ganz gut so etwas schreiben wie $c = b/a$. Deswegen konzentrieren wir uns auf diesen Monomorphismus $a \to b$ und denken uns das als *Paar*: Objekt b und so etwas wie ein Unterobjekt a. (Grothendieck benutzt tatsächlich diese Sprache, erklärt aber auch mit Sorgfalt, was er damit meint.) Wir können eine projektive Auflösung $P(a)$ von a bauen, und eine projektive Auflösung $P(b)$ von b. Der Monomorphismus $A \to b$ wird eine Kettenabbildung bestimmen, $P(a) \to P(b)$, bis auf Kettenhomotopie, und in jedem Fall so, dass

$$\begin{tikzcd} P(a)_0 \arrow[r] \arrow[d] & P(b)_0 \arrow[d] \\ a \arrow[r] & b \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Das genügt uns hier aber nicht. Sondern wir wollen ausserdem, dass $P(a) \to P(b)$ wieder mono ist, und sogar in jedem Grad spaltbar (so dass $P(b)_j$ als direkte Summe von $P(a)_j$ und etwas anderem geschrieben werden kann). Nennen wir das eine *paarweise projektive Auflösung vom Monomorphismus* $a \to b$. Existenz und etwas in Richtung Eindeutigkeit werden in Lemma 11.12 weiter unten gezeigt.

Wir nehmen uns jetzt also so eine paarweise projektive Auflösung $P(a) \to P(b)$ von Monomorphismus $a \to b$. Dann ist

$$\mathrm{coker}_t(P(a) \to P(b)),$$

abgekürzt $P(b)/P(a)$, eine projektive Auflösung von $c = b/a$, wie man leicht nachrechnet. Weil $P(a) \to P(b) \to P(b)/P(a)$ nicht nur kurz exakt ist, sondern auch gradweise spaltet, dürfen wir jetzt F anwenden und sicher sein, dass auch

$$F(P(a)) \to F(P(b)) \to F(P(b)/P(a))$$

kurz exakt ist in $\mathcal{B}$ (und sogar gradweise spaltet). Damit erhalten wir die gewünschte lange exakte Folge

$$\cdots \longrightarrow L_{j+1}F(c) \xrightarrow{\partial} L_jF(a) \longrightarrow L_jF(b) \longrightarrow L_jF(c) \xrightarrow{\partial} L_{j-1}F(a) \longrightarrow \cdots$$

Weiter jetzt zum Thema Eindeutigkeit oder auch Natürlichkeit. Wir denken uns ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[d] \\ a' \arrow[r] & b' \end{tikzcd}$$

in $\mathcal{A}$, in dem die Zeilen Monomorphismen sind. Wir wählen paarweise projektive Auflösungen $P(a) \to P(b)$ und $P(a') \to P(b')$. Wir wissen schon, dass es Kettenabbildungen $P(a) \to P(a')$ und $P(b) \to P(b')$ gibt, eindeutig bis auf Kettenhomotopie, die mit $a \to a'$ bzw $b \to b'$ verträglich sind. Nach Lemma 11.12 können wir sie verträglich wählen und erhalten damit automatisch eine Kettenabbildung

$$P(b)/P(a) \to P(b')/P(a'),$$

die wir auch in der Form $P(c) \to P(c')$ schreiben dürfen. Also erhalten wir ein Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & L_{j+1}F(c) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & L_jF(a) \arrow[r] \arrow[d] & L_jF(b) \arrow[r] \arrow[d] & L_jF(c) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & L_{j-1}F(a) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & L_{j+1}F(c') \arrow[r, "\partial"] & L_jF(a') \arrow[r] & L_jF(b') \arrow[r] & L_jF(c') \arrow[r, "\partial"] & L_{j-1}F(a') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

in dem die vertikalen Pfeile durch $P(a) \to P(a')$, $P(b) \to P(b')$ und $P(c) \to P(c')$ induziert sind, und als solche schon ganz gut bekannt. Wir müssen aber noch die Kommutativität der Quadrate

$$\begin{tikzcd}
L_{j+1}F(c) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & L_jF(a) \arrow[d] \\
L_{j+1}F(c') \arrow[r, "\partial"] & L_jF(a')
\end{tikzcd}$$

zeigen. Es läuft darauf hinaus, dass wir zeigen:

$$\begin{tikzcd}
P(c) \arrow[r, "g"] \arrow[d] & P(a) \arrow[d] \\
P(c') \arrow[r, "g'"] & P(a')
\end{tikzcd}$$

ist kommutativ bis auf Kettenhomotopie. Hier sind die horizontalen Pfeile bestimmt wie in Beispiel 11.10 durch Wahl von Spaltungen $s_j\colon P(c)_j \to P(b)_j$ und $s'_j\colon P(c') \to P(b')_j$ für alle j. (Warnung: es sind Kettenabbildungen vom Grad -1.) Tatsächlich können wir die Spaltungen im Allgemeinen nicht verträglich wählen. Deswegen erhalten wir als Mass der Unverträglichkeit Differenzmorphismen $P(c)_j \to P(b')_j$, die wir auch in der Form $P(c)_j \to P(a')_j$ schreiben können. Diese bilden die gesuchte Kettenhomotopie, zwischen zwei Kettenabbildungen $P(c) \to P(a')$ vom Grad -1. (Einzelheiten LeserIn überlassen.)

Schliesslich sollte noch bemerkt werden, dass es uns freisteht, im obigen Argument anzunehmen, dass $a = a'$ und $b = b'$ sind und dass die Morphismen $a \to a'$ sowie $b \to b'$ die Identitäten sind (während andererseits $P(a)$ nicht mit $P(a')$ gleichgesetzt werden muss, und $P(b)$ nicht mit $P(b')$. Dann lernen wir, dass der Randmorphismus $\partial : L_{j+1}F(c) \to L_jF(a)$ wohldefiniert ist, also unabhängig von der Wahl der paarweisen Auflösung. □

Lemma 11.12. *Zu jedem Monomorphismus $a \to b$ in $\mathcal{A}$ existiert eine paarweise projektive Auflösung $P(a) \to P(b)$; Definition davon oben gegeben. Ist*

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[d] \\
a' \arrow[r] & b'
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm, in dem die horizontalen Pfeile Monomorphismen sind, und sind $P(a) \to P(b)$ sowie $P(a') \to P(b')$ paarweise projektive Auflösungen von $a \to b$

bzw $a' \to b'$, dann existieren Kettenabbildungen $P(a) \to P(a')$ und $P(b) \to P(b')$, die miteinander verträglich sind und die die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} P(a) & \longrightarrow & P(b) \\ \downarrow & & \downarrow \\ P(a') & \longrightarrow & P(b') \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} P(a)_0 & \longrightarrow & a \\ \downarrow & & \downarrow \\ P(a')_0 & \longrightarrow & a' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} P(b)_0 & \longrightarrow & b \\ \downarrow & & \downarrow \\ P(b')_0 & \longrightarrow & b' \end{array}$$

kommutativ machen.

Beweis. Existenz einer paarweisen Auflösung von $a \to b$: wir können anfangen mit einer projektiven Auflösung $P(a)$ von a und einer projektiven Auflösung $P(c)$ von $c = b/a = \mathrm{coker}_t(a \to b)$. Wir setzen vorläufig $P(b)_j := P(a)_j \oplus P(c)_j$. Die Differentiale $P(b)_j \to P(b)_{j-1}$ müssen aber noch definiert werden. Wir setzen sie in der Form

$$\begin{bmatrix} d_j^{P(a)} & v_j \\ 0 & d_j^{P(c)} \end{bmatrix}$$

an, wobei $v_j\colon P(c)_j \to P(a)_{j-1}$ für $j \geq 1$. Es muss also gelten

$$d^{P(a)} v_j + v_{j-1} d^{P(c)} = 0$$

für $j \geq 2$. (Das sieht fast so aus, als ob die v_j zusammen eine Kettenabbildung vom Grad -1 veranstalten wollen.) Ausserdem brauchen wir einen Morphismus $v_0\colon P(c)_0 \to b$, so dass die Zusammensetzung $P(c)_0 \to b \to c$ gleich der Augmentation ist (die zur Auflösung von c gehört). Dann hätten wir einen Epi

$$P(b)_0 = P(a)_0 \oplus P(c)_0 \longrightarrow b$$

der auf $P(a)_0$ mit der Augmentation $P(a) \to a$ (gefolgt von Monomorphismus $a \to b$) übereinstimmt und auf $P(c)_0$ mit v_0. Das soll die Augmentation für $P(b)$ sein. Demnach muss auch

$$\eta v_1 + v_0 d^{P(c)} = 0$$

gelten, wobei η die Zussammensetzung $p(a)_0 \to a \to b$ ist. Also müssen die v_j mit $j \geq 0$ tatsächlich eine Kettenabbildung vom Grad -1 im folgenden Sinn bilden:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] \arrow[dr] & P(c)_2 \arrow[r] \arrow[dr] & P(c)_1 \arrow[r] \arrow[dr] & P(c)_0 \arrow[r] \arrow[dr] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & P(a)_2 \arrow[r] & P(a)_1 \arrow[r] & P(a)_0 \arrow[r, "\eta"] & b \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Jetzt verstehen wir alles. Denn die untere Zeile in diesem Diagramm ist eine Auflösung von c. Genauer, H_{-1} davon ist isomorph zu $b/a = c$, und alle anderen Homologieobjekte sind 0. Es ist allerdings nicht unbedingt eine *projektive* Auflösung von c, denn b muss ja nicht projektiv sein. Die obere Zeile ist nach wie vor eine *projektive* Auflösung von c. Also können wir die Kettenabbildung $v = (v_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ vom Grad -1 im Wesentlichen so konstruieren, wie wir das schon in Kapitel 10 gesehen haben. (Projektivität der Ziel-Auflösung wurde da zwar vorausgesetzt, aber nicht benutzt.)

Wir bemerken, dass *jede* paarweise projektive Auflösung von Monomorphismus $a \to b$ so beschrieben werden kann, wie wir es eben getan haben; also anfangend mit $P(a)$ und $P(c)$, weiter $P(b)_j = P(a)_j \oplus P(c)_j$, Differential in der Form

$$\begin{bmatrix} d_j^{P(a)} & v_j \\ 0 & d_j^{P(c)} \end{bmatrix}$$

für $j \geq 1$, und zusätzliches $v_0 \colon P(c)_0 \to b$ für die Augmentation. Deswegen können wir im zweiten Teil von diesem Beweis annehmen, dass wir schon $P(a)$, $P(a')$, $P(a')$, $P(b')$, und $v_j \colon P(c)_j \to P(a)_{j-1}$ für $j \geq 1$ gewählt haben, analog $v'_j \colon P(c')_j \to P(a')_{j-1}$ für $j \geq 1$, und $v_0 \colon P(c)_0 \to b$ sowie $v'_0 \colon P(c')_0 \to b'$. Damit sind $P(b)$ und $P(b')$ mitsamt Augmentationen definiert. Wir setzen jetzt den gesuchten Kettenmorphismus $P(b) \to P(b')$ in der Form

$$\begin{bmatrix} f & w \\ 0 & g \end{bmatrix}$$

an, wobei $f \colon P(a) \to P(a')$ ein Kettenmorphismus verträglich mit $a \to a'$ ist und $g \colon P(c) \to P(c')$ Kettenmorphismus verträglich mit $c \to c'$, und $w_j \colon P(c)_j \to P(a')_j$. Weil es ein Kettenmorphismus ist, muss gelten

$$\begin{bmatrix} d^{P(a')} & v' \\ 0 & d^{P(c')} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f & w \\ 0 & g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & w \\ 0 & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^{P(a)} & v \\ 0 & d^{P(c)} \end{bmatrix}$$

und daher

$$d^{P(a')} w_j - w_{j-1} d^{P(c)} = v'_j g_j - f_{j-1} v_j$$

für $j \geq 1$, das heisst, w ist eine Kettenhomotopie von fv nach $v'g$ (oder nach ... von). Hier fassen wir zuerst fv und $v'g$ nur als Kettenmorphismen $P(c) \to P(a')$ vom Grad -1 auf, also ohne Berücksichtigung von v_0 bzw v'_0. Wir können/sollen aber v_0 und v'_0 noch dazunehmen; das heisst, wir verlangen auch noch

$$\eta' w_0 = v'_0 g_0 - f_{-1} v_0$$

wobei f_{-1} gedeutet wird als der vorgegebene Pfeil $b \to b'$ (und η' die Rolle von einem "angehängten" Differential für $P(a')$ spielt). Dann wird w eine Kettenhomotopie zwischen zwei Kettenmorphismen fv und $v'g$ (vom Grad -1), die beide von der Form

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] \arrow[dr] & P(c)_2 \arrow[r] \arrow[dr] & P(c)_1 \arrow[r] \arrow[dr] & P(c)_0 \arrow[r] \arrow[dr] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & P(a')_2 \arrow[r] & P(a')_1 \arrow[r] & P(a')_0 \arrow[r, "\eta'"] & b' \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

sind. Jetzt verstehen wir wieder alles. Denn diese beiden Kettenmorphismen sind Kettenmorphismen von einer projektiven Auflösung von c nach einer Auflösung (nicht unbedingt projektiv) von c'. Die induzierten Morphismen $c = H_0(...) \to H_{-1}(...) = c'$ sind dieselben (ein Morphismus $c = b/a \to c' = b'/a'$ war vorgegeben). Daher können wir die Existenz einer solchen Homotopie wie in Kapitel 10 zeigen. $\square$

12. Mehr über Ext

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Für Kettenkomplexe C und D in $\mathcal{A}$, graduiert über $\mathbb{Z}$ wie gewöhnlich, sei $[C,D]_j$ die abelsche Gruppe der Kettenhomotopieklassen von Kettenmorphismen vom Grad j. Dazu ein paar Einzelheiten: Kettenmorphismus $f\colon C\to D$ vom Grad j bedeutet, dass wir Morphismen

$$f_s\colon C_s \longrightarrow D_{s+j}$$

haben für alle $s\in\mathbb{Z}$, und dass $d^D f_s = (-1)^j f_{s-1} d^C$ gilt für alle s (wobei d^C und d^D die Differentiale bezeichnet). Eine Kettenhomotopie von f nach g (beide vom Grad j) besteht aus Morphismen

$$h_s\colon C_s \longrightarrow D_{s+j+1}$$

mit der Eigenschaft $d^D h_s + (-1)^j h_{s-1} d^C = g_s - f_s$ für alle s. Wir sagen dann, dass f und g kettenhomotop sind. Es ist eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen bilden eine abelsche Gruppe, die wie gesagt mit $[C,D]_j$ bezeichnet werden soll.

Bemerkung: Wenn $f\colon C\to D$ ein Kettenmorphismus vom Grad j ist, und h eine Homotopie von f nach f, dann kann h auch als Kettenmorphismus vom Grad $j+1$ aufgefasst werden. Denn es gilt $d^D h_s + (-1)^j h_{s-1} d^C = 0$ für alle $s\in\mathbb{Z}$. Auf diese Weise kann man den Sinn des Vorzeichens $(-1)^j$ verstehen.

Gegeben Objekte a und b in $\mathcal{A}$. Sei $P(a)$ eine projektive Auflösung und $I(b)$ eine injektive Auflösung von b. Vorsicht: wir wollen hier $P(a)$ und $I(b)$ gleichermassen als Kettenkomplexe (graduiert über $\mathbb{Z}$) auffassen, also nicht $I(b)$ als Kokettenkomplex. Demnach schreiben wir $I(b)_j$ für das, was normalerweise $I(b)^{-j}$ geschrieben wird. Das hat zur Folge, dass $I(b)_j = 0$ für $j>0$. Wohingegen natürlich $P(a)_j = 0$ für $j<0$. Wir wollen auch a und b als Kettenkomplexe auffasssen und schreiben dafür provisionell $\bar a$ und $\bar b$. Also ist $\bar a_j = a$ für $j=0$ und $\bar a_j = 0$ für $j\neq 0$.

Satz 12.1. *Es gibt Isomorphismen*

$$\begin{tikzcd}
H^j(\hom(P(a),b)) \arrow[d, "\cong"] & & H_{-j}(\hom(a,I(b))) \arrow[d, "\cong"] \\
{[P(a),\bar b]_{-j}} \arrow[r, "\cong"] & {[P(a),I(b)]_{-j}} & {[\bar a, I(b)]_{-j}} \arrow[l, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

Die horizontalen Isomorphismen sind hier induziert durch die Kettenmorphismen $\bar b\to I(b)$ bzw $P(a)\to\bar a$, die zu den Auflösungen gehören.

Beweis. Die vertikalen Isomorphismen sind nicht tiefsinnig. Wenn C irgendein Kettenkomplex in $\mathcal{A}$ ist, dann ist eine Kettenmorphismus $f\colon \bar a\to C$ vom Grad r vollständig bestimmt durch

$$f_0\colon a \longrightarrow C_r\ ,$$

und es muss $d^C f_0 = 0$ gelten. Wenn f,g zwei solche Kettenmorphismen sind, vom Grad r, dann ist eine Homotopie h von f nach g vollständig bestimmt durch

$$h_0\colon a \longrightarrow C_{r+1}$$

und es muss $d^C h_0 = g_0 - f_0$ gelten. Also ist

$$[\bar{a}, C]_r \cong \frac{\ker[d\circ\ :\ \hom(a, C_r) \to \hom(a, C_{r-1})]}{\mathrm{im}[d\circ\ :\ \hom(a, C_{r+1}) \to \hom(a, C_r)]} = H_r(\hom(a, C))$$

wobei wieder ker und im im traditionellen Sinn verstanden werden sollen. Wir benutzen das mit $C = I(b)$ und $r = -j$.

Die horizontalen Isomorphismen sind etwas schwieriger. Die Situation ist allerdings symmetrisch, so dass wir uns zum Beispiel auf den linken konzentrieren können. Um Surjektivität zu zeigen, denken wir uns eine Kettenabbildung $f\colon P(a) \to I(b)$ vom Grad $-j$ (im Bild ist $j = 3$):

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P(a)_4 \arrow[r] \arrow[d] & P(a)_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & P(a)_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & P(a)_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & P(a)_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & I(b)_0 \arrow[r] & I(b)_{-1} \arrow[r] & I(b)_{-2} \arrow[r] & I(b)_{-3} \arrow[r] & I(b)_{-4} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Jetzt soll f schrittweise vereinfacht werden. Angenommen, wir wissen schon, dass $f_s = 0$ für alle $s > t$, für ein gewisses $t > 0$. Wir wollen $h_{t-1}\colon P(a)_{t-1} \to I(b)_{t-j}$ finden derart, dass $f_t = h_{t-1}d$. Nach Voraussetzung ist $f_t d = 0$, also dürfen wir f_t etwas informell als Morphismus von

$$\mathrm{coker}(d\colon P(a)_{t+1} \to P(a)_t) \cong \mathrm{im}(d\colon P(a)_t \to P(a)_{t-1})$$

nach $I(b)_{t-j}$ auffassen. (Traditionelle Interpretation von im und coker. Es wurde auch $t > 0$ benutzt.) Dieser lässt sich dann erweitern zu einem Morphismus

$$h_{t-1}\colon P(a)_{t-1} \to I(b)_{t-j},$$

weil $I(b)_{t-j}$ ein injektives Objekt ist. (Wobei wir $\mathrm{im}(d\colon P(a)_t \to P(a)_{t-1})$ als "Unter"-objekt von $P(a)_{t-1}$ aufgefasst haben.) Fertig. Der Rest ist Formsache. Wenn wir f_t durch $0 = f_t - h_{t-1}d$ ersetzen und f_{t-1} durch $f_{t-1} - (-1)^j dh_{t-1}$, dann haben wir einen neuen Kettenmorphismus (provisorisch g genannt, vom Grad $-j$) von $P(a)$ nach $I(b)$, der kettenhomotop zu f ist, weil

$$(-1)^j(g - f) = dh + (-1)^j hd$$

(wobei $h_s = 0$ für $s \neq t-1$). Verbesserungsschritt gelungen. So kann fortgefahren werden, bis wir eine Repräsentanten der Homotopieklasse von f konstruiert haben, der höchstens noch im Grad 0 von Null verschieden ist und deshalb eine Kettenabbildung von $\bar{a}$ nach $I(b)$ darstellt (immer noch Grad $-j$). Damit ist die Surjektivität gezeigt.

Injektivität: geht genauso. (In der Vorlesung habe ich behauptet, dass es einfacher geht ... es war ein Fehler.) Wenn $f\colon \bar{a} \to I(b)$ eine Kettenabbildung vom Grad $-j$ ist, und sie wird nullhomotop nach Zusammensetzung mit der Augmentation $P(a) \to \bar{a}$, dann erhalten wir eine Nullhomotopie, etwa $(h_s)_{s\geq 0}$. Diese Nullhomotopie können wir schrittweise vereinfachen, ohne f zu verändern. Wir können beispielsweise (h_s) als eine Kettenabbildung vom Grad $1 - j$ auffassen, wenn wir alle $I(b)_s$ mit $s \leq -j$ unterdrücken (durch das Nullobjekt ersetzen). Dann finden wir wie oben eine dazu homotope Kettenabbildung, etwa $(h'_s)_{s\geq 0}$, bei der aber höchstens h'_0 von Null verschieden ist. Diese können wir wieder als eine Nullhomotopie h' auffassen für die Zusammensetzung von f mit $P(a) \to \bar{a}$ (und Wiedererwecken von den unterdrückten $I(b)_s$ mit $s \leq -j$). Weil aber alle h'_s mit $s > 0$

gleich Null sind, können wir h' auch als Nullhomotopie für $f\colon \bar{a} \to I(b)$ selbst verstehen, ohne Zusammensetzen mit $P(a) \to \bar{a}$. (Wichtig ist hier, dass $h'_0 d = 0$.) Also war f schon nullhomotop; das beweist die Injektivität. $\square$

Bemerkung 12.2. Ein wichtige Konsequenz von Satz 12.1 ist wie folgt. Wenn es in $\mathcal{A}$ sowohl genügend Projektive als auch genügend Injektive gibt, dann können wir

$$\mathrm{Ext}_j^{\mathcal{A}}(a,b)$$

für Objekte a,b von $\mathcal{A}$ un $j \in \mathbb{Z}$ auf zweierlei Weise definieren:

- als $L_j F_b(a) = H^j(\hom_{\mathcal{A}}(P(a),b))$ wobei $F_b(x) = \hom_{\mathcal{A}}(x,b)$ und wobei F_b als rechtsexakter Funktor von $\mathcal{A}$ nach $\mathbf{abGrp}^{\mathrm{op}}$ aufgefasst wird;
- als $R_j G_a(b) = H^j(\hom_{\mathcal{A}}(a, I(b)))$ wobei $G_a(x) = \hom_{\mathcal{A}}(a,x)$, linksexakter Funktor von $\mathcal{A}$ nach $\mathbf{abGrp}$. In dieser Formel wird $I(b)$ wieder als Kokettenkomplex aufgefasst.

Die folgende Proposition hat eine starke Ähnlichkeit mit Satz 12.1, der Beweis ist aber einfacher.

Proposition 12.3. *Gegeben Objekte a,b von $\mathcal{A}$ mit projektiven Auflösungen $P(a)$ und $P(b)$. Die Augmentation $P(b) \to b$ induziert eine Bijektion von abelschen Gruppen*

$$\mathrm{Ext}_j^{\mathcal{A}}(a,b) = H^j(\hom_{\mathcal{A}}(P(a),b)) = [P(a),\bar{b}]_{-j} \longrightarrow [P(a),P(b)]_{-j}\,.$$

Beweis. Im Surjektivitätsteil haben wir folgende Aufgabe:

$$\begin{tikzcd} & P(b) \arrow[d] \\ P(a) \arrow[ur, dotted, "f"] \arrow[r, "\varphi"'] & \bar{b} \end{tikzcd}$$

(gegeben Kettenabbildung φ vom Grad $-j$, gesucht Kettenabbildung f vom Grad $-j$). Die Komponenten $f_s\colon P(a)_s \to P(b)_{s-j}$ können per Induktion nach s konstruiert werden. Für $s < j$ muss $f_s = 0$ sein. Für $s = j$ suchen wir $f_j\colon P(a)_j \to P(b)_0$. Wir kennen aber schon die Zusammensetzung

$$\begin{tikzcd} P(a)_j \arrow[r, dotted, "f_j"] & P(b)_0 \arrow[r, two heads] & b \end{tikzcd}$$

denn sie ist durch φ gegeben. Wegen der projektiven Eigenschaft von $P(a)_j$ (und weil $P(b)_0 \to b$ epi) existiert so ein f_j. Für $s = j+1$ haben wir die Aufgabe

$$\begin{tikzcd} P(a)_{j+1} \arrow[r, dotted, "f_{j+1}"] \arrow[d, "d"] & P(b)_1 \arrow[d, "d"] \\ P(a)_j \arrow[r, "f_j"] & P(b)_0 \arrow[d, "\alpha"] \\ & b \end{tikzcd}$$

wobei rechte Spalte exakt. Nach Voraussetzung ist $\alpha f_j d = \varphi_0 d = 0$. Also können wir $f_j d$ auffassen als Morphismus mit Ziel $\ker_s(\alpha)$. Weil $P(a)_1$ projektiv ist (und $P(b)_1 \to \ker_s(\alpha)$

epi) finden wir dann f_{j+1} wie gewünscht. Wenn alle f_s für $s \leq t$ schon konstruiert sind, wobei $t \geq j+1$, dann haben wir die Aufgabe

$$\begin{tikzcd}
P(a)_{t+1} \arrow[r, dotted, "f_{t+1}"] \arrow[d, "d"] & P(b)_{t+1-j} \arrow[d, "d"] \\
P(a)_t \arrow[r, "f_t"] \arrow[d, "d"] & P(b)_{t-j} \arrow[d, "d"] \\
P(a)_{t-1} \arrow[r, "f_{t-1}"] & P(b)_{t-j-1}
\end{tikzcd}$$

wobei rechte Spalte exakt. Durch Diagrammjagd ergibt sich $df_t d = 0$, also können wir $f_t d$ auffassen als Morphismus mit Ziel

$$\ker_s(d\colon P(b)_{t-j} \to P(b)_{t-j-1})\,.$$

Dann finden wir f_{t+1} wegen der projektiven Eigenschaft von $P(a)_{t+1}$.

Soviel zur Surjektivität. Jetzt Injektivität. Wir nehmen also an, dass Kettenmorphismus $f\colon P(a) \to P(b)$ vom Grad $-j$ gegeben ist und dass die Zusammensetzung

$$P(a) \xrightarrow{f} P(b) \longrightarrow \bar{b}$$

homotop zu Null ist. Das bedeutet, dass wir

$$\begin{tikzcd}
P(a)_j \arrow[r, "f_j"] \arrow[d] & P(b)_0 \arrow[d, "\alpha"] \\
P(a)_{j-1} \arrow[r, dotted] & b
\end{tikzcd}$$

lösen können. Dann finden wir $h_{j-1}\colon P(a)_{j-1} \to P(b)_0$ mit

$$(-1)^j \alpha h_{j-1} d = \alpha f_j$$

wegen Projektivität von $P(a)_{j-1}$. Dann konstruieren wir induktiv Morphismen

$$h_s\colon P(a)_s \to P(b)_{s-j+1}$$

für $s \geq j$ derart, dass

$$f_s = dh_s + (-1)^j h_{s-1} d$$

wird, also $dh_s = f_s - (-1)^j h_{s-1} d$. Dabei wird die Projektivität von $P(a)_s$ benutzt und

$$d(f_s - (-1)^j h_{s-1} d) = 0$$

für $s > j$ (das muss bei der Konstruktion von h_{s-1} arrangiert werden), und für $s = j$ die Gleichung $\alpha(f_j - (-1)^j h_{j-1} d) = 0$ wie oben. Dann ist $(h_s)_{s \geq j-1}$ eine Nullhomotopie für den Kettenmorphismus f. □

Korollar 12.4. *Wenn $\mathcal{A}$ genügend viele Projektive hat, dann gibt es assoziative (biadditive) Produkte*

$$\mathrm{Ext}^{\mathcal{A}}_k(b,c) \times \mathrm{Ext}^{\mathcal{A}}_\ell(a,b) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{\mathcal{A}}_{k+\ell}(a,c),$$

wobei a, b, c beliebige Objekte von $\mathcal{A}$ sind. Für $k = \ell = 0$ stimmen sie mit der gewöhnlichen Zusammensetzung

$$\hom(b, c) \times \hom(a, b) \longrightarrow \hom(a, c)$$

überein. Ausserdem sind die Elemente $\mathrm{id}_a \in \mathrm{Ext}_0^{\mathcal{A}}(a, a) = \hom(a, a)$ zweiseitige neutrale Elemente für dieses Produkt.

Beweis. Ist klar, wenn wir stattdessen schreiben

$$[b, c]_{-k} \times [a, b]_{-\ell} \longrightarrow [a, c]_{-(k+\ell)}.$$

Das Produkt ist die Zusammensetzung von Homotopieklassen. □

Beispiel 12.5. Sei G eine endliche Gruppe und $\mathbb{Z}[G]$ der dazu gehörende Gruppenring. Das *Norm*-Element von $\mathbb{Z}[G]$ ist

$$\nu = \sum_{g \in G} g \in \mathbb{Z}[G].$$

Wir schreiben (auch) $\mathbb{Z}$ für die abelsche Gruppe $\mathbb{Z}$ mit trivialer Wirkung von G, aufgefasst als $\mathbb{Z}[G]$-Modul (vorzugsweise Linksmodul). Für jeden $\mathbb{Z}[G]$-Linksmodul N können wir schreiben

$$N^G := \{z \in N \mid gz = z \text{ für alle } g \in G\} \cong \hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, N) = \mathrm{Ext}_0^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, N).$$

Man sagt, dass G *periodische Kohomologie* mit Periode k hat, wenn ein Element

$$u \in \mathrm{Ext}_k^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$$

existiert, so dass für jeden $\mathbb{Z}[G]$-Linksmodul N das Produkt mit u

$$\mathrm{Ext}_\ell^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, N) \to \mathrm{Ext}_{k+\ell}^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, N)$$

ein Isomorphismus ist für beliebiges $\ell > 0$; ausserdem surjektiv für $\ell = 0$ mit Kern gleich der Untergruppe νN von N^G.

Diese Eigenschaft (von G) ist eine notwendige Bedingung dafür, dass G frei, orientierungserhaltend und stetig auf der Sphäre S^{k-1} wirken kann. (*Frei* bedeutet, dass $gz \neq z$ für $g \neq 1$ und beliebiges $z \in S^{k-1}$. *Stetig* bedeutet natürlich, dass $z \mapsto gz$ stetig ist für jedes $g \in G$.) Der Beweis dieser Notwendigkeit soll demnächst skizziert werden. Um es etwas einfacher zu machen, werden wir allerdings Differenzierbarkeit der Wirkung annehmen statt nur Stetigkeit.

Beispiel 12.6. Sei G eine endliche zyklische Gruppe G von ungerader Ordnung. Wir haben schon mal vor längerer Zeit gezeigt, dass G nicht periodische Kohomologie der Periode $1, 3, 5, 7, \dots$ hat. Also kann G nach der Behauptung oben nicht auf einer Sphäre gerader Dimension frei und stetig wirken. (Orientierungserhaltend wäre automatisch, weil G ungerade Ordnung hat.) Allerdings kann G auf einer Sphäre ungerader Dimension frei und stetig wirken; das ist bekannt. (Denn wir können G als Untergruppe von S^1 auffassen, wobei S^1 selbst als Einheitskreis in $\mathbb{C}$ aufgefasst wird, und dieses S^1 wirkt auf der Einheitssphäre S^{2m-1} von $\mathbb{C}^m$ durch Skalarmultiplikation.)

Definition 12.7. Simplizialer Komplex: eine Menge V zusammen mit $\mathcal{T}$, Menge von nichtleeren endlichen Teilmengen von V. Bedingungen:

- Jede Teilmenge $S \subset V$ mit $|S| = 1$ ist Element von $\mathcal{T}$.
- Wenn $S \in \mathcal{T}$ und $\emptyset \neq S' \subset S$, dann $S' \in \mathcal{T}$.

Definition 12.8. Geometrische Realisierung von $(V, \mathcal{T})$: ist der topologische Raum $|V|_{\mathcal{T}}$ bestehend aus allen $f\colon V \to [0,1]$ derart, dass

$$\{v \in V \mid f(v) > 0\}$$

Element von $\mathcal{T}$ ist und $\sum_{v \in V} f(v) = 1$. Die Topologie auf $|V|_{\mathcal{T}}$ kann zum Beispiel durch eine Metrik definiert werden, etwa

$$d(f,g) := \max\{\, |f(v) - g(v)|\}.$$

(Bemerkung dazu: es gibt noch eine andere vernünftige Art, eine Topologie auf $|V|_{\mathcal{T}}$ festzulegen, die hier aber nicht beschrieben werden soll. Die beiden stimmen jedenfalls überein, wenn $\mathcal{T}$ lokal-endlich ist, das heisst, zu jedem $v \in V$ gibt es nur endlich viele $S \in \mathcal{T}$ mit $v \in S$. Das genügt uns.)

Definition 12.9. Kettenkomplex vom simplizialen Komplex $(V, \mathcal{T})$: dazu ist es bequem, obwohl eigentlich nicht nötig, eine totale Ordnung für die Menge V zu wählen. Sei $C_k(V, \mathcal{T})$ die freie abelsche Gruppe mit Erzeugern genannt $S^!$, wobei $S \in \mathcal{T}$ mit Kardinalität $k+1$ (als Teilmenge von V). Wir können schreiben $S = \{s_0, s_1, \dots, s_k\}$ (richtige Reihenfolge im Sinn der totalen Ordnung) und setzen

$$d(S^!) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j (S \smallsetminus \{s_j\})^!.$$

Auf diese Weise wird ein Homomorphismus von (freien) abelschen Gruppen

$$d\colon C_k(V, \mathcal{T}) \to C_{k-1}(V, \mathcal{T})$$

definiert, falls $k \geq 1$. Man verifiziert leicht: $dd = 0$. Also haben wir einen Kettenkomplex $C(V, \mathcal{T})$ definiert.

Wenn man keine totale Ordnung auf V wählen möchte, kann man so verfahren. Für jede injektive Abbildung $p\colon \{0, 1, \dots, k\} \to V$, deren Bild Element von $\mathcal{T}$ ist, nehmen wir uns einen Erzeuger vom Namen $p^!$. Zwischen diesen Erzeugern werden die Relationen

$$p^! \sim \operatorname{sgn}(\tau)(p \circ \tau)^!$$

eingeführt, wobei $\tau\colon \{0, 1, \dots, k\} \to \{0, 1, \dots, k\}$ bijektiv ist, und

$$\operatorname{sgn}(\tau) \in \{\pm 1\}$$

das bekannte Vorzeichen der Permutation τ ist. Wir definieren also C_k neu als freie abelsche Gruppe erzeugt von den $p^!$, modulo Relationen $p^! \sim \operatorname{sgn}(\tau)(p \circ \sigma)^!$. Wir können immer noch definieren

$$d(p^!) := \sum_{j=0}^{k} (-1)^k (p \circ e_j)^!$$

wobei $e_j\colon \{0, 1, \dots, k-1\} \to \{0, 1, \dots, k\}$ diejenige injektive und ordnungserhaltende Abbildung bezeichnet, die das Element j auslässt. Es ist ein wohldefinierter Homomorphismus $C_k \to C_{k-1}$.

Simpliziale Komplexe sind Objekte einer Kategorie. Ein *Morphismus* von $(V,\mathcal{T})$ nach $(W,\mathcal{U})$ ist eine Abbildung $g\colon V \to W$ mit der Eigenschaft: $g(S) \in \mathcal{U}$ für jedes $S \in \mathcal{T}$. (Beachten, dass S hier nicht Element von V ist, sondern Teilmenge von V.)

Geometrische Realisierung ist ein Funktor. Das heisst, ein Morphismus

$$g\colon (V,\mathcal{T}) \to (W,\mathcal{U})$$

von simplizialen Komplexen induziert eine stetige Abbildung $g_*\colon |V|_\mathcal{T} \to |W|_\mathcal{U}$ wie folgt. Für $f \in |V|_\mathcal{T}$, also $f\colon V \to [0,1]$ mit $\sum_v f(v) = 1$ usw., sei $g_*(f)\colon W \to [0,1]$ definiert durch

$$g_*(f)(w) = \sum_{v \in f^{-1}(w)} f(v)\,.$$

Dann ist $g_*(f) \in |W|_\mathcal{U}$.

Ein Morphismus $g\colon (V,\mathcal{T}) \to (W,\mathcal{U})$ induziert auch einen Kettenmorphismus (wieder g_* genannt) von $C(V,\mathcal{S})$ nach $C(W,\mathcal{U})$. Dieser Kettenmorphismus bildet den Erzeuger von $C(V,\mathcal{T})_k$, der einem injektiven $p\colon \{0,1,\dots,k\} \to V$ mit $p(V) \in \mathcal{T}$ entspricht, auf den Erzeuger von $C(W,\mathcal{U})$ ab, der gp entspricht, falls $gp\colon \{0,1,\dots,k\} \to W$ immer noch injektiv ist. Sonst wird dieser Erzeuger von $C(V,\mathcal{T})_k$ auf $0 \in C(W,\mathcal{U})_k$ geschickt. — Auf diese Weise ist $(V,\mathcal{T}) \mapsto C(V,\mathcal{T})$ auch ein Funktor.

Wie man sieht, sind simpliziale Komplexe auf halbem Weg zwischen Topologie und homologischer Algebra angesiedelt. Der folgende Satz aus der algebraischen Topologie unterstreicht das. (Die Formulierung ist etwas improvisiert; sie sagt bestimmt nicht alles, was eigentlich gesagt werden müsste.)

Satz 12.10. *Sei $g\colon (V,\mathcal{T}) \to (W,\mathcal{U})$ ein Morphismus von simplizialen Komplexen. Die Kettenhomotopieklasse von $g_*\colon C(V,\mathcal{T}) \to C(W,\mathcal{U})$ hängt nur von der Homotopieklasse von $g_*\colon |V|_\mathcal{T} \to |W|_\mathcal{U}$ ab.*

Beispiel 12.11. Sei $(V,\mathcal{T})$ ein simplizialer Komplex. Angenommen, $|V|_\mathcal{T}$ ist homotopieäquivalent zu einem Punkt. Wir wählen irgendein $v_0 \in V$ und machen daraus einen simplizialen Komplex $(W,\mathcal{U})$, also $W = \{v_0\}$ und $\mathcal{U} = \{\{v_0\}\}$. Die Inklusion $W \to V$ und die Projektion $V \to W$ (mit $v \mapsto v_0$ für alle $v \in V$) sind dann Morphismen von simplizialen Komplexen. Die induzierten stetigen Abbildungen von $|V|_\mathcal{T}$ nach $|W|_\mathcal{U}$ und von $|W|_\mathcal{U}$ nach $|V|_\mathcal{T}$ sind homotopie-invers zueinander. Aus dem oben zitierten Satz folgt sofort, dass die entsprechenden Kettenmorphismen $C(V,\mathcal{T}) \to C(W,\mathcal{U})$ und $C(W,\mathcal{U}) \to C(V,\mathcal{T})$ invers zueinander sind bis auf Kettenhomotopie. Also können wir sagen: $H_0(C(V,\mathcal{T})) \cong \mathbb{Z}$ und $H_j(C(V,\mathcal{T})) = 0$ für $j \neq 0$.

Ausserdem können wir selbstverständlich auch noch sagen: für jeden Morphismus $g\colon (V,\mathcal{T}) \to (V,\mathcal{T})$ ist der induzierte Homomorphismus $H_0(C(V,\mathcal{T})) \to H_0(C(V,\mathcal{T}))$ die Identität. Denn $g_*\colon |V|_\mathcal{T} \to |V|_\mathcal{T}$ ist homotop zur Identität.

13. Weitere Anwendungen von Ext

Wir stellen uns eine Gruppe G vor mit einer Wirkung[10] auf $\mathbb{R}^n$, die folgende Eigenschaften hat.

[10] Die Wirkung sollte einen Namen haben, zum Beispiel $\alpha\colon G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, aber wir schreiben lieber gz statt $\alpha(g,z)$.

- Differenzierbarkeit: für jedes $g \in G$ ist die Abbildung $z \mapsto gz$ von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$ differenzierbar;
- frei und diskret:[11] jedes $z \in \mathbb{R}^n$ besitzt eine offene Umgebung U derart, dass $gU \cap U = \emptyset$ für jedes $g \in G$ mit $g \neq 1$. (Daraus folgt, dass $gz \neq z$ für beliebiges $z \in \mathbb{R}^n$ und $g \in G$ mit $g \neq 1$.)

Beispiel: G könnte $\mathbb{Z}^m$ sein mit $m \leq n$, und die Wirkung könnte sein:

$$gz := (g_1 + z_1, \ldots, g_m + z_m, z_{m+1}, \ldots, z_n),$$

wobei ich annehme, dass z Koordinaten $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{R}$ hat und dass g Koordinaten $g_1, g_2, \ldots, g_m$ in $\mathbb{Z}$ hat. (Und ja, $\mathbb{Z}$ wird hier additiv geschrieben, aber die Wirkung wird weiter multiplikativ geschrieben, wie in gz.)

Der Beweis von folgendem Satz soll angedeutet werden.

Satz 13.1. *Unter diesen Bedingungen gilt* $\mathrm{Ext}_j^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, N) = 0$ *für alle* $j > n$ *und jeden* $\mathbb{Z}[G]$*-Linksmodul* N*. Dabei bezeichnet* $\mathbb{Z}$ *den* $\mathbb{Z}[G]$*-Linksmodul gegeben durch abelsche Gruppe* $\mathbb{Z}$ *mit der trivialen Wirkung von* G*.*

Korollar 13.2. G *ist torsionsfrei, das heisst,* G *hat keine endlichen Untergruppen ausser der trivialen Untergruppe* $\{1\}$*.*

Beweis von Korollar. Wenn G eine nichttriviale endliche Untergruppe besitzt, dann auch eine nichttriviale endliche zyklische Untergruppe K. Dieses K wirkt jetzt immer noch auf $\mathbb{R}^n$ (Einschränken der Wirkung von G), und diese Wirkung von K auf $\mathbb{R}^n$ erfüllt immer noch die schönen Bedingungen (differenzierbar, frei und diskret). Also muss gelten, dass

$$\mathrm{Ext}_j^{\mathbb{Z}[K]}(\mathbb{Z}, N) = 0$$

für $j > n$ und jeden $\mathbb{Z}[K]$-Linksmodul N. Wir haben aber schon nachgerechnet, dass das nicht der Fall ist. Also Widerspruch. □

Jetzt zum "Beweis" von Satz 13.1. Hier wird erstmal ein Überblick angeboten. Weitere Einzelheiten vielleicht später.

(i) Wir bilden den Bahnenraum[12] $M = \mathbb{R}^n/G$, versehen mit der Quotiententopologie. (Eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n/G$ heisst offen genau dann, wenn ihr Urbild in $\mathbb{R}^n$ offen als Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist.) Wir stellen fest, dass M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

(ii) Nach einem allgemeinen Satz lässt sich jede differenzierbare Mannigfaltigkeit triangulieren. Für M bedeutet das, dass wir einen Homöomorphismus

$$\psi \colon M \to |V|_{\mathcal{S}}$$

finden können, wobei $(V, \mathcal{S})$ simplizialer Komplex. Ausserdem ist es hier wichtig, zu bemerken, dass nur solche Teilmengen von V Elemente von $\mathcal{S}$ sind, die (als Teilmengen von V) höchstens $n+1$ Elemente haben.

[11] Auf Englisch heisst das *free and properly discontinuous.*

[12] Orbit space

(iii) Die Triangulierung von $M = \mathbb{R}^n/G$ bestimmt eine Triangulierung von $\mathbb{R}^n$, also Homöomorphismus
$$\varphi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow |W|_{\mathcal{T}}$$
mit einem gewissen simplizialen Komplex $(W,\mathcal{T})$. Diesen simplizialen Komplex können wir uns ungefähr so denken. Ein Element von W ist ein Paar (v,z) bestehend aus einem $v \in V$ und einem $z \in \mathbb{R}^n$ derart, dass
$$Gz = \Psi^{-1}(v).$$
(Die Gleichung ist fast sinnvoll, weil beide Seiten ein Element von $\mathbb{R}^n/G = M$ beschrieben. Allerdings haben wir hier unerlaubterweise $v \in V$ mit seiner charakteristischen Funktion identifiziert, das heisst, mit dem Element von $|V|_{\mathcal{S}}$, das durch $f_v(v) = 1$ und $f_v(v') = 0$ für $v' \neq v$ definiert ist.) Damit ist schon klar, dass wir eine vergessliche Abbildung
$$p\colon W \to V$$
haben, und dass G auf W wirkt: $g \cdot (v,z) = (v, gz)$. Wir wollen $\mathcal{T}$ so definieren, dass die Abbildung $p\colon W \to V$ zu einem Morphismus von simplizialen Komplexen wird (also $p(S) \in \mathcal{S}$ für jedes $S \in \mathcal{T}$) und auch so, dass für jedes $g \in G$ die Translation mit g, als Abbildung $W \to W$, ein (Iso)morphismus von $(W,\mathcal{T})$ nach $(W,\mathcal{T})$ wird. Und schliesslich so, dass wir ein kommutatives Diagramm
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & {|W|_{\mathcal{T}}} \arrow[d] \\ \mathbb{R}^n/G \arrow[r, "\psi"] & {|V|_{\mathcal{S}}} \end{tikzcd}$$
erhalten.

(iv) Wir stellen dann fest, dass nicht nur die Wirkung von G auf W frei ist, sondern dass folgende stärkere Bedingung erfüllt ist: für jedes $S \in \mathcal{T}$ und $g \in G$ mit $g \neq 1$ ist $S \cap gS = \emptyset$. Auf diese Weise finden wir, dass der Kettenkomplex $C(W,\mathcal{T})$ in jedem Grad frei ist als $\mathbb{Z}[G]$-Linksmodul. Ausserdem ist $C_k(W,\mathcal{T}) = 0$ für $k > n$ nach Konstruktion. Ausserdem ist $H_0(C(W,\mathcal{S})) \cong \mathbb{Z}$ und $H_j(C(W,\mathcal{S})) = 0$ für $j \neq 0$. Das folgt aus Beispiel 12.11. Man kann hier noch genauer sein: die Gruppe G wirkt ja auch auf $H_0(C(W,\mathcal{S}))$, weil sie schon auf $(W,\mathcal{S})$ wirkt, und wir wollen wissen, dass diese Wirkung von G auf $H_0(C(W,\mathcal{S}))$ trivial ist. Das ist sie, und es folgt auch aus Beispiel 12.11.

(v) Zusammenfassend: wir haben eine freie (damit projektive) Auflösung $C = C(W,\mathcal{T})$ vom trivialen $\mathbb{Z}[G]$-Linksmodul $\mathbb{Z}$ gefunden, die endliche Länge hat, genauer gesagt: $C_k = 0$ für $k > n$. Die Aussage von Satz 13.1 folgt dann sofort, weil wir dieses C benutzen dürfen, um Ext zu berechnen:
$$\mathrm{Ext}_j^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, N) = H^j(\hom_{\mathbb{Z}[G]}(C, N)).$$

Einzelheiten zu (i): warum ist $\mathbb{R}^n/G$ differenzierbare Mannigfaltigkeit? Für jedes $z \in \mathbb{R}^n$ können wir offene Umgebung U finden derart, dass die Mengen gU mit $g \in G$ paarweise disjunkt sind. Damit ist garantiert, dass die Zusammensetzung f von Inklusion $U \to \mathbb{R}^n$ und Quotientenabbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/G = M$ injektiv ist. Man überlegt sich, dass sie auch einen Homömorphismus von U mit $f(U)$, Unterraum von M, induziert. Auf diese Weise haben wir Karten der Form $f\colon U \to M$. Es ist klar, dass man damit ganz M überdecken kann. Man überlegt sich, dass die Kartenwechsel differenzierbar sind (wenn man überhaupt die Definition einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit kennt). Also differenzierbarer Atlas ... damit wird M befördert zum Status einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit.

Einzelheiten zu (ii): Für eine nichtleere endliche Menge S sei $\Delta(S)$ der topologische Raum aller Funktionen $f\colon S \to [0,1]$ mit der Eigenschaft $\sum_{s\in S} f(s) = 1$. (Man kann ihn als Unterraum vom Vektorraum $\mathbb{R}^S$ auffassen, Vektorraum aller Abbildungen von S nach $\mathbb{R}$.) Man nennt $\Delta(S)$ gerne den *Simplex* mit Eckenmenge S, oder so ähnlich. Wenn $(V, \mathcal{S})$ *irgendein* simplizialer Komplex ist, dann kann man sich $|V|_{\mathcal{S}}$ als die Vereinigung von Unterräumen $\Delta(S)$ mit $S \in \mathcal{S}$ vorstellen. (Jedem $S \in \mathcal{S}$ entspricht die Menge der Funktionen $f\colon V \to [0,1]$ mit $\sum f(v) = 1$ und $f(v) = 0$ für $v \notin S$; diese bilden einen Unterraum von $|V|_{\mathcal{S}}$, und wir können ihn mit $\Delta(S)$ identifizieren.) Wenn man schon sagt, dass sich eine beliebige differenzierbare Mannigfaltigkeit M der Dimension n immer triangulieren lässt, dann kann man gleich noch etwas mehr sagen: es gibt einen Homöomorphismus $\psi\colon M \to |V|_{\mathcal{S}}$ mit der Eigenschaft, dass ψ^{-1} eingeschränkt auf Unterräume $\Delta(S)$ von $|V|_{\mathcal{S}}$ glatt (= unendlich oft differenzierbar) ist, und sogar so, dass die Ableitungen an jedem Punkt, aufgefasst als lineare Abbildungen von einem $(|S|-1)$-dimensionalen Vektorraum in einen n-dimensionalen Vektorraum, injektiv sind. Das ist sinnvoll, weil wie schon gesagt $\Delta(S)$ als Unterraum vom endlich-dimensionalen reellen Vektorraum $\mathbb{R}^S$ aufgefasst werden kann. (Trotzdem müsste man dazu lokale Koordinaten wählen, um die Ableitungen als Matrizen zu schreiben.)

Einzelheiten zu (iii): Wir müssen genauer sagen, welche nichtleeren endlichen Teilmengen von W als Elemente von $\mathcal{T}$ zugelassen werden sollen. Für $S \subset V$ mit $S \in \mathcal{S}$ fragen wir nach stetigen Lösungen von

$$\begin{tikzcd} \Delta(S) \arrow[r, dotted] \arrow[d, "\text{Inkl.}"] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\text{Proj.}"] \\ |V|_{\mathcal{S}} & \mathbb{R}^n/G \arrow[l, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

Jede derartige Lösung $e\colon \Delta(S) \to \mathbb{R}^n$ gibt uns eine Teilmenge S_e von W bestehend aus den Elementen $(v, e(v))$ mit $v \in S$. (Denn es gilt $\psi(G \cdot e(v)) = v$. Wieder ist $v \in S$ mit seiner charakteristischen Funktion identifiziert worden.) Genau diese Teilmengen der Form S_e werden als Elemente von $\mathcal{T}$ zugelassen. Dann definieren wir den gewünschten Homöomorphismus $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to |W|_{\mathcal{T}}$ so, dass folgendes kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \Delta(S_e) \arrow[r, "\text{Inkl.}"] \arrow[d, "\cong"] & {|W|_{\mathcal{T}}} \\ \Delta(S) \arrow[r, "e"] & \mathbb{R}^n \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Um das besser zu verstehen, sollte man natürlich überschauen, wieviele derartige "Lösungen" $e\colon \Delta(S) \to \mathbb{R}^n$ bei gegebenem $S \in \mathcal{S}$ existieren. Antwort: es gibt wenigstens eine Lösung, und sobald man eine Lösung e gewählt hat, kann man jede Lösung eindeutig konstruieren als dieses e gefolgt von Multiplikation mit einem festem $g \in G$. (Multiplikation von links mit $g \in G$ wird hier aufgefasst als Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Weil wir ja die Wirkung haben.) Das folgt aus der elementaren Theorie der Überlagerungen[13], hier angewandt auf die Überlagerung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/G$.

Neue Anwendung: Wir denken uns eine Gruppe G mit einer Wirkung auf der Sphäre S^n, die folgende Eigenschaften hat.

- Differenzierbarkeit: für jedes $g \in G$ ist die Abbildung $z \mapsto gz$ von S^n nach S^n differenzierbar;
- frei: für jedes $z \in S^n$ und $g \in G$ mit $g \neq 1$ ist $gz \neq z$. (Daraus folgt wegen Kompaktheit von S^n, dass die Wirkung auch diskret ist: jedes $z \in S^n$ besitzt eine offene Umgebung U derart, dass $gU \cap U = \emptyset$ falls $g \in G$ mit $g \neq 1$.)

Beispiele gibt es später. Der Beweis von folgendem Satz soll angedeutet werden.

Satz 13.3. *Unter diesen Bedingungen hat G periodische Kohomologie mit Periode $2(n+1)$, und sogar mit Periode $n+1$, wenn die Wirkung orientierungserhaltend ist.*

Korollar 13.4. *Unter diesen Bedingungen ist jede kommutative Untergruppe von G zyklisch. Wenn n gerade ist, und die Wirkung orientierungserhaltend, dann ist $G = \{1\}$.*

Beweis von Korollar modulo Satz. Angenommen, irgendeine kommutative Untergruppe von G ist nicht zyklisch. Dann besitzt G eine Untergruppe K der Form $K \cong \mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$ für irgendeine Primzahl p. Dieses K wirkt immer noch auf S^n, und deswegen können wir den Satz direkt mit K statt G anwenden. Also hat K periodische Kohomologie. Aus Berechnungen wissen wir aber, dass das nicht der Fall ist (Anleitung weiter unten); also Widerspruch.

Jetzt sei n gerade und die Wirkung orientierungserhaltend. Angenommen, $G \neq \{1\}$. Dann besitzt G eine Untergruppe K der Form $K \cong \mathbb{Z}/p$, wobei p Primzahl. Damit haben wir eine Wirkung von K auf S^n, die wieder die schönen Bedingungen erfüllt. Sie ist orientierungserhaltend. Also hat K periodische Kohomologie mit ungerader Periode $n+1$. Aus Berechnungen wissen wir aber, dass das nicht stimmt. Also Widerspruch. □

Der Beweis von Satz 13.3 hat viele Gemeinsamkeiten mit dem von Satz 13.1. Deswegen kann es diesmal etwas schneller gehen. Wir bilden also zuerst den Bahnenraum $M = S^n/G$ und stellen fest, dass das eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist. Wir dürfen dann eine Triangulierung von M wählen. Diese bestimmt eine Triangulierung von S^n, die unter der Wirkung von G invariant ist. Genauer, da ist ein simplizialer Komplex $(W, \mathcal{T})$ mit Wirkung von G, und wir haben einen Homöomorphismus

$$\varphi \colon S^n \longrightarrow |W|_{\mathcal{T}}$$

der mit den G-Wirkungen verträglich ist. Die Wirkung von G auf $(W, \mathcal{T})$ hat ausserdem die Eigenschaft, dass $gS \cap S = \emptyset$ für jedes $S \in \mathcal{T}$. Also können wir sagen, dass der Kettenkomplex $C(W, \mathcal{T})$ ein Kettenkomplex von Moduln über $\mathbb{Z}[G]$ ist, und:

> die $\mathbb{Z}[G]$-Moduln $C(W, \mathcal{T})_k$ sind sämtlich frei, und damit projektiv; sie sind auch endlich erzeugt; ausserdem $C(W, \mathcal{T})_k = 0$ für $k > n$ und für $k < 0$.

[13] Englisch: covering spaces.

Es ist aber diesmal nicht so, dass $C(W,\mathcal{T})$ eine freie Auflösung von $\mathbb{Z}$ ist. Stattdessen können wir aus Satz 12.10 herleiten, dass

$$\begin{aligned}&H_0(C(W,\mathcal{T}))\cong\mathbb{Z}\\&H_n(C(W,\mathcal{T}))\cong\mathbb{Z}\\&H_j(C(W,\mathcal{T}))=0 \text{ falls } j\neq 0,n.\end{aligned}$$

(Einzelheiten dazu gibt es später.) Dabei ist die Wirkung von G auf $H_0(C(W,\mathcal{T}))\cong\mathbb{Z}$ (induziert von der Wirkung von G auf $(W,\mathcal{T})$) trivial, und das kann auch aus Satz 12.10 hergeleitet werden. Die Wirkung von G auf $H_n(C(W,\mathcal{T}))\cong\mathbb{Z}$ ist aber nicht unbedingt trivial, sondern sie gibt das Orientierungsverhalten der Wirkung von G auf S^n wieder. Das heisst, $g\in G$ wirkt wie id auf $H_n(C(W,\mathcal{T}))$ genau dann, wenn Multiplikation mit g eine orientierungserhaltende (differenzierbare) Abbildung von S^n nach S^n ist, und natürlich wie $-$id sonst. Darauf will ich hier lieber nicht näher eingehen. Wir schreiben also weiter $H_0(C(W,\mathcal{T}))=\mathbb{Z}$ und fassen das als $\mathbb{Z}[G]$-Modul in der üblichen trivialen Weise auf. Andererseits sollten wir

$$H_n(C(W,\mathcal{T}))=\mathbb{Z}^t$$

schreiben (oder ähnlich), um anzudeuten, dass hier ein $\mathbb{Z}[G]$-Modul vorliegt, der zwar als abelsche Gruppe isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist, der aber trotzdem nicht unbedingt isomorph ist als $\mathbb{Z}[G]$-Modul zu dem, den wir trivial nennen.

Beweis von Satz 13.3, algebraischer Teil. Im folgenden schreibe ich kurz C statt $C(W,\mathcal{T})$. Wir konstruieren einen Kettenkomplex D von endlich erzeugten projektiven $\mathbb{Z}[G]$-Linksmoduln und eine Inklusion $C\to D$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) die Inklusion $C\to D$ bestimmt Isomorphismen $C_k\to D_k$ für alle $k\le n$.
(b) $H_j(D)=0$ für alle $j\ge 0$.

Wir können das in der üblichen induktiven Weise machen. Das heisst, wir wählen endlich erzeugtes projektives D_{n+1} und einen Morphismus von $\mathbb{Z}[G]$-Moduln $D_{n+1}\to C_n$, dessen Bild gleich dem Kern von $C_n\to C_{n-1}$ ist. Danach wählen wir endlich erzeugtes projektives D_{n+2} und einen Morphismus von $\mathbb{Z}[G]$-Moduln $D_{n+2}\to D_{n+1}$, dessen Bild gleich dem Kern von $D_{n+1}\to C_n$ ist. Danach wählen wir endlich erzeugtes projektives D_{n+3} und einen Morphismus von $\mathbb{Z}[G]$-Moduln $D_{n+3}\to D_{n+2}$, dessen Bild gleich dem Kern von $D_{n+2}\to D_{n+1}$ ist. Und so weiter. Resultat: wir haben eine kurze exakte Folge von Kettenkomplexen

$$C\longrightarrow D\xrightarrow{\;u\;} D/C$$

bei der D eine projektive Auflösung von $\mathbb{Z}$ ist, während D/C eine (verschobene) projektive Auflösung von $\mathbb{Z}^t$ ist — verschoben in der Weise, dass $(D/C)_j=0$ für $j<n+1$ und $H_{n+1}(D/C)\cong\mathbb{Z}^t$ und $H_j(D/C)=0$ für $j>n+1$. Ausserdem wissen wir natürlich nach wie vor, dass $C_j=0$ für $j>n$ und $j<0$. Sei jetzt N ein beliebiger $\mathbb{Z}[G]$-Linksmodul. (Ich versuche, die Bezeichnungen von Beispiel 12.5 zu benutzen.) Dann haben wir eine kurze exakte Folge von (Ko)Kettenkomplexen

$$\hom_{\mathbb{Z}}[G](C,N)\longleftarrow \hom_{\mathbb{Z}[G]}(D,N)\longleftarrow \hom_{\mathbb{Z}[G]}(D/C,N)$$

Diese bestimmt eine lange exakte Folge von Kohomologiegruppen, die wir in der Form

$$\begin{array}{c}
\vdots \\
\downarrow \\
H^{j-1}(\hom_{\mathbb{Z}[G]}(C,N)) \\
\downarrow \\
\mathrm{Ext}^{\mathbb{Z}[G]}_{j-n-1}(\mathbb{Z}^t,N) \\
\downarrow u_* \\
\mathrm{Ext}^{\mathbb{Z}[G]}_{j}(\mathbb{Z},N) \\
\downarrow \\
H^{j}(\hom_{\mathbb{Z}[G]}(C,N)) \\
\downarrow \\
\vdots
\end{array}$$

schreiben dürfen (wegen der besonderen Eigenschaften von D und D/C, wie gerade erwähnt). Beachten: der Pfeil mit dem Namen u_* ist tatsächlich Zusammensetzung mit

$$u \in \mathrm{Ext}^{\mathbb{Z}[G]}_{n+1}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}^t)$$

wie in Korollar 12.4 allgemeiner definiert. Für $j > n$ haben wir $H^j(\hom_{\mathbb{Z}[G]}(C,N)) = 0$. Demnach sind wegen Exaktheit die Homomorphismen

$$\begin{array}{c}
\mathrm{Ext}^{\mathbb{Z}[G]}_{j-n-1}(\mathbb{Z}^t,N) \\
\downarrow u_* \\
\mathrm{Ext}^{\mathbb{Z}[G]}_{j}(\mathbb{Z},N)
\end{array}$$

bijektiv falls $j > n+1$, und surjektiv für $j = n+1$. Das erinnert schon sehr an die Definition von periodischer Kohomologie in Beispiel 12.5. Wir sollten noch fragen, was der Kern ist für $j = n+1$. Dazu gibt es Lemma 13.5 weiter unten; anwenden mit $V = C_n$ und $U = \ker(d\colon C_n \to C_{n-1})$. Danach ist der Kern im Fall $j = n+1$ gleich

$$\nu \hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^t, N)$$

aufgefasst als Untergruppe von $\hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}^t, N)$. Dabei ist $\nu \in \mathbb{Z}[G]$ das Norm-Element. Jetzt ist der Beweis schon vollständig für den Fall, dass $\mathbb{Z}^t = \mathbb{Z}$, also für den Fall, dass die gegebene Wirkung von G auf S^n orientierungserhaltend ist.

Für den ganz allgemeinen Fall fügen wir noch eine kleine Bemerkung hinzu. Es gibt einen Funktor F von der Kategorie der $\mathbb{Z}[G]$-Linksmoduln in sich selber. Er ist gegeben durch

$$F(N) = \mathbb{Z}^t \otimes_{\mathbb{Z}} N$$

wobei N irgendein $\mathbb{Z}[G]$-Linksmodul ist und die rechte Seite ein $\mathbb{Z}[G]$-Linksmodul ist wie folgt: $g(1 \otimes x) = g1 \cdot gx$ für beliebige $g \in G$ und $x \in N$. Der Funktor F ist additiv, exakt, ausserdem eine Äquivalenz von Kategorien, und schliesslich ist noch FF isomorph zu id. (Wir können also ganz gut so tun, als ob F ein Automorphismus der Ordnung 2 ist.) Anwenden von F auf

$$u \in \mathrm{Ext}^{\mathbb{Z}[G]}_{n+1}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^t)$$

gibt uns

$$F(u) \in \mathrm{Ext}^{\mathbb{Z}[G]}_{n+1}(F(\mathbb{Z}), F(\mathbb{Z}^t)) = \mathrm{Ext}^{\mathbb{Z}[G]}_{n+1}(\mathbb{Z}^t, \mathbb{Z}).$$

Wir bilden die Zusammensetzung

$$w := F(u) \cdot u \in \mathrm{Ext}^{\mathbb{Z}[G]}_{2n+2}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})\,.$$

Es ist leicht zu sehen, dass dieses Element w die gewünschten Eigenschaften hat (wie in Beispiel 12.5, mit w anstelle von u und $2n+2$ anstelle von k). Also hat G periodische Kohomologie mit der Periode $2n+2$. □

Lemma 13.5. *Sei G endliche Gruppe, V ein projektiver $\mathbb{Z}[G]$-Linksmodul und $U \subset V$ ein Untermodul mit der Eigenschaft, dass V/U als abelsche Gruppe frei ist. Dann ist das Bild der Einschränkung*

$$\hom_{\mathbb{Z}[G]}(V, N) \longrightarrow \hom_{\mathbb{Z}[G]}(U, N)$$

die Untergruppe $\nu \cdot \hom_{\mathbb{Z}}(U, N) \subset \hom_{\mathbb{Z}[G]}(U, N)$, wobei $\nu \in \mathbb{Z}[G]$ das Norm-Element ist und $\hom_{\mathbb{Z}}(U, N)$ als $\mathbb{Z}[G]$-Linksmodul aufgefasst wird wie folgt: $(gq)(y) := g(q(g^{-1}y))$ für $q \in \hom_{\mathbb{Z}}(U, N)$ und $g \in G$ und $y \in U$.

Beweis. Es ist leicht, auf den Fall zu reduzieren, wo V frei ist als $\mathbb{Z}[G]$-Modul. In diesem Fall gilt $\nu \cdot \hom_{\mathbb{Z}}(V, N) = \hom_{\mathbb{Z}[G]}(V, N)$ und es folgt, dass das Bild der Einschränkung

$$\hom_{\mathbb{Z}[G]}(V, N) \to \hom_{\mathbb{Z}[G]}(U, N)$$

enthalten ist in der Untergruppe $\nu \cdot \hom_{\mathbb{Z}}(U, N) \subset \hom_{\mathbb{Z}[G]}(U, N)$. Andererseits ist der Einschränkungshomomorphismus $\hom_{\mathbb{Z}}(V, N) \to \hom_{\mathbb{Z}}(U, N)$ surjektiv, weil V/U als abelsche Gruppe frei ist. Also ist die Untergruppe $\nu \cdot \hom_{\mathbb{Z}}(U, N)$ von $\hom_{\mathbb{Z}[G]}(U, N)$ auch enthalten im Bild der Einschränkung $\hom_{\mathbb{Z}[G]}(V, N) \to \hom_{\mathbb{Z}[G]}(U, N)$. □