04.01.2013

Bemerkungen zur 9. Vorlesungswoche Funktionentheorie WS 2012/13 (Weiss)

In dieser Woche ging es um Konvergenz von Funktionenfolgen und Funktionenreihen, darunter Potenzreihen als Spezialfall. Der Grund für diese Untersuchungen ist folgender. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch und $a \in \mathbb{C}$. Es folgt (Woche 10, ziemlich leicht) aus den Cauchy-Integralformeln, dass sich f in einer kleinen offenen Kreisscheibe um a durch eine Potenzreihe darstellen lässt.
Rückblickend habe ich das Gefühl, dass diese Begründung nicht gegeben wurde oder nicht genügend betont wurde, und überhaupt wurde vielleicht zuviel definiert. Trotzdem dürfen Sie sich merken: Bei Funktionenfolgen und Funktionenreihen interessiert uns eben nicht nur, ob punktweise Konvergenz stattfindet (so dass die Grenzfunktion oder Summenfunktion definiert ist), sondern auch, ob die Konvergenz in *gleichmässiger* Weise vonstatten geht. Es interessiert uns vor allem im Hinblick auf Fragen wie: ist die Grenzfunktion oder Summenfunktion stetig, differenzierbar, usw.

Eine erste grundlegende Definition: Sei D irgendeine Menge und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen, $f_n : D \to \mathbb{R}^q$. Wir sagen, dass die Folge *gleichmässig* konvergiert gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}^q$, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit der Eigenschaft, dass $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$.

Ein Beispiel für eine Funktionenfolge, die "punktweise" konvergiert, aber nicht gleichmässig, ist folgendes. Für $n \geq 1$ sei $f_n : [0,1] \to [0,1]$ definiert durch

$$f(t) = \begin{cases} nt & \text{falls} \quad nt \leq 1 \\ 2 - nt & \text{falls} \quad 1 \leq nt \leq 2nt \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also ist f_n stetig und hat ein Maximum bei $t = 1/n$ mit Wert 1. Für jedes feste $t \in [0,1]$ ist

$$\lim_{n\to\infty} f(t) = 0\ .$$

Deswegen sagen wir, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ *punktweise* gegen die Funktion $f \equiv 0$ konvergiert. Die Konvergenz ist aber nicht gleichmässig!!! Man sieht das schon daran, dass der Maximalwert von f_n gleich 1 ist für beliebiges n, während der Maximalwert von f natürlich Null ist.

In der Definition von gleichmässiger Konvergenz wie oben ist D einfach eine Menge; eine Metrik auf D ist nicht gegeben. Wenn wir aber voraussetzen, dass $D \subset \mathbb{R}^p$, dann können wir die folgende nützliche Abschwächung von gleichmässiger Konvergenz einführen:

Sei $D \subset \mathbb{R}^p$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen, $f_n : D \to \mathbb{R}^q$. Wir sagen, dass die Folge *lokal gleichmässig* gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}^q$ konvergiert, falls für jedes $x \in D$ eine offene Teilmenge U von $\mathbb{R}^p$ existiert mit $x \in U$ und derart, dass die Folge $(f_n|D \cap U)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmässig gegen $f|D \cap U$ konvergiert.

Nützliche Anwendung: wenn eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie oben lokal gleichmässig konvergiert gegen $f : D \to \mathbb{R}^q$, und jedes f_n ist stetig, dann ist auch die Grenzfunktion f stetig. (Sollten Sie wie üblich aus den Analsysivorlesungen wissen ...) Das folgende Beispiel zeigt, dass es im allgemeinen nicht gut geht, wenn man nur punktweise Konvergenz voraussetzt.

Für $n \geq 1$ sei $f_n : [0,1] \to [0,1]$ definiert durch

$$f(t) = \begin{cases} 1 - nt & \text{falls} \quad nt \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also ist f_n stetig. Ausserdem existiert eine Grenzfunktion f; es ist nämlich $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0$ falls $t > 0$ und $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 1$. Die Grenzfunktion ist aber offenbar nicht stetig.

Es gibt entsprechende gleichmässige Konvergenzbegriffe für Funktionen*reihen*. Sei zum Beispiel D eine Menge und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen, $f_n : D \to \mathbb{R}^q$. Wir sagen, dass die *Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ gleichmässig gegen $f : D \to \mathbb{R}^q$ konvergiert, falls die Folge der Partialsummenfunktionen gleichmässig gegen f konvergiert. (Die Partialsummenfunktionen sind natürlich f_0, $f_0 + f_1$, $f_0 + f_1 + f_2$ undsoweiter.) Ähnlich: lokal gleichmässige Konvergenz von Funktionenreihe im Fall, wo $D \subset \mathbb{R}^p$.

Bei Funktionenreihen kann man auch auf den Gedanken kommen, die Begriffe *absolute Konvergenz* und *lokal gleichmässige Konvergenz* zu kombinieren. Das Resultat heisst leider nicht absolute gleichmässige Konvergenz, sondern *normale Konvergenz*. Der Einfachheit halber nehmen wir mal an, dass wir es mit einer Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ zu tun haben, wobei D offen in $\mathbb{C}$ ist. Dann sieht die Definition so aus.

Wir sagen dass, die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *normal konvergiert* gegen $f : D \to \mathbb{C}$, falls zu jedem $a \in D$ eine offene Teilmenge $U \subset D$ mit $a \in U$ existiert und eine konvergente Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ von nichtnegativen reellen Zahlen M_n derart, dass $M_n \geq |f_n(z)|$ für jedes n und alle $z \in U$.

Ausgerüstet mit diesem Vokabular können wir jetzt zwei Sätze von Weierstrass über Folgen und Reihen von komplex differenzierbaren Funktionen formulieren. *Erster Satz*: Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $(f_n : D \to \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von analytischen Funktionen, die lokal gleichmässig konvergiert gegen ein $f : D \to \mathbb{C}$. Dann ist f auch analytisch, und die Folge $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert lokal gleichmässig gegen f'. *Zweiter Satz*: Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $(f_n : D \to \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von analytischen Funktionen derart, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ normal konvergiert gegen ein $f : D \to C$. Dann ist f auch analytisch, und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n$ konvergiert normal gegen f'.
Die Beweise sind eigentlich nicht schwierig, beruhen aber sehr stark auf den Integralformeln von Cauchy. Deswegen haben diese Sätze keine Entsprechungen für Folgen oder Reihen von (differenzierbaren) reellwertigen Funktionen.

Nach diesen sehr allgemeinen Betrachtungen betreffend Funktionenreihen wollen wir uns jetzt hauptsächlich mit dem Spezialfall Potenzreihen beschäftigen. Hier gibt es gleich zwei wichtige und durchaus einfache Vokabeln: *Entwicklungspunkt* und *Konvergenzradius.* Eine *Potenzreihe mit Entwicklungspunkt* $a \in \mathbb{C}$ ist ein Ausdruck der Form

$$b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + b_3(z-a)^3 + \cdots$$

oder in Kurzform,

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$$

wobei $b_0, b_1, b_2, \ldots$ komplexe Zahlen sind. Natürlich hoffen wir, dass durch diesen Ausdruck eine Funktion von z definiert wird, aber das wird noch nicht behauptet. Dazu brauchen wir den Begriff *Konvergenzradius.* Der Konvergenzradius R der obenstehenden Potenzreihe hängt nur von den Zahlen $b_0, b_1, \ldots$ ab und kann definiert werden als

$$\sup\left\{\rho \in [0,\infty[\;\middle|\; \text{die Folge der Zahlen } |b_n\rho^n| \text{ ist beschränkt}\right\}$$

oder auch als

$$\sup\left\{\rho \in [0,\infty[\;\middle|\; \lim_{n\to\infty} |b_n\rho^n| = 0\right\}.$$

(Es war eine Übungsaufgabe, zu zeigen, dass diese beiden Definitionen dasselbe ausdrücken.) Der Konvergenzradius R wird als ein Element von $[0,\infty]$ betrachtet. Das heisst, er ist ohne Bedingungen definiert, kann aber in bedauerlichen Fällen gleich 0 sein, oder in Glücksfällen gleich ∞. Ein Beispiel von einem bedauerlichen Fall ist die Potenzreihe

$$1 + 1z + 2z^2 + 6z^3 + 24z^4 + 120z^5 + \cdots + n!z^n + \cdots$$

während die Potenzreihe

$$1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots + \frac{1}{n!}z^n + \cdots$$

ein bekannter Glücksfall ist. (In diesen Fällen ist der Entwicklungspunkt 0.)

Über den Konvergenzradius gibt es einen einfachen und sehr praktischen Satz. Gegeben sei also Potenzreihe

$$\sum_{n\geq 0}^{\infty} b_n(z-a)^n$$

mit Entwicklungspunkt a und Konvergenzradius R. *Für $z \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $|z-a| < R$ konvergiert die Potenzreihe absolut, und für $z \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $|z-a| > R$ divergiert sie.* Und noch mehr: *Die Reihe konvergiert normal* (gegen ein f) *im Gebiet D, das aus allen $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-a| < R$ besteht.* Damit wissen wir (wegen Weierstrass), dass die Funktion f in D analytisch ist; ausserdem können wir auch in D ihre Ableitung erhalten durch gliedweises Differenzieren,

$$f'(z) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} nb_n(z-a)^{n-1}.$$