04.01.2013

Bemerkungen zu Vorlesungswochen 7 und 8 Funktionentheorie WS 2012/13 (Weiss)

In den Vorlesungswochen 7 und 8 wurde Stoff aus den ersten sechs Vorlesungswochen wiederholt. Ein wichtiges Thema, das hier ganz gut noch einmal zusammengefasst werden kann, war die Existenz von Stammfunktionen (unter gewissen Bedingungen) im Sinne der komplexen Differenzierbarkeit. Unser stärkstes Resultat in dieser Richtung war wie folgt:

(1) Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Sterngebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ eine analytische (d.h. komplex differenzierbare) Funktion. Dann besitzt f eine Stammfunktion $F : D \to \mathbb{C}$ (so dass $F' \equiv f$ in ganz D).

Bemerkenswert ist hier, dass wir Bedingungen vom Schlage Differenzierbarkeit an f stellen, um die Existenz einer Stammfunktion F (also etwas wie Integrierbarkeit von f) zu sichern. Im Reellen, also im Falle einer reellwertigen Funktion g, die auf einem offenen Intervall definiert ist, genuegt Stetigkeit von g, um die Existenz einer Stammfunktion G zu sichern. Ob g selbst differenzierbar ist, ist dabei belanglos.
Wie wurde dieses Resultat (1) bewiesen? Der Beweis beruht auf Kurvenintegralen und rechtfertigt daher auch die Idee Kurvenintegral. Es fängt an mit folgender Beobachtung:

(2) Wenn $D \subset \mathbb{C}$ offen ist (muss nicht Sterngebiet sein) und $f : D \to \mathbb{C}$ stetig ist (muss nicht analytisch sein), und wenn f eine Stammmfunktion besitzt, also komplex differenzierbares $F : D \to \mathbb{C}$ mit $F' = f$, dann gilt für jede geschlossene stückweise glatte Kurve $\alpha : [a, b] \to D$, dass
$$\int_\alpha f(z)\ dz = 0\ .$$

Wir haben dann ohne grosse Schwierigkeiten eine Art Umkehrung beweisen können:

(3) Wenn $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet ist und $f : D \to \mathbb{C}$ stetig ist, und wenn für jede geschlossene stückweise glatte Kurve $\alpha : [a, b] \to D$ gilt, dass
$$\int_\alpha f(z)\ dz = 0\ ,$$
dann besitzt f eine Stammfunktion (also $F : D \to \mathbb{C}$ analytisch mit $F' \equiv f$).

Um so ein F zu konstruieren, wählt man sich irgendeinen Punkt z_* in D und definiert

$$F(w) := \int_{\alpha_w} f(z)\ dz$$

wobei α_w eine stückweise glatte Kurve in D mit Anfangspunkt $z_* \in D$ und Endpunkt $w \in D$ ist. Die Voraussetzung an f sichert in erster Linie, dass dieses F wohldefiniert ist. Es ist dann leicht, zu zeigen, dass ausserdem $F' \equiv f$ ist.
Auf diese Weise konnten wir eine Brücke von (3) nach (1) schlagen durch Beweis des folgenden Resultates:

(4) Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Sterngebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch. Dann gilt für jede geschlossene stückweise glatte Kurve $\alpha : [a, b] \to D$, dass

$$\int_{\alpha} f(z)\ dz = 0.$$

Den Beweis von (4) konnten wir mit elementaren Überlegungen (unter Benutzung der Sterngebieteigenschaft) auf den Fall zurückführen, wo α den Rand eines Dreiecks durchläuft, dessen Inneres ganz in D enthalten ist. Dieser Spezialfall von (4) hiess *Cauchy Integralsatz für Dreiecke*. Übrigens: wenn man von vornherein annimmt, dass α den Rand eines Dreiecks durchläuft, dessen Inneres ganz in D enthalten ist, dann braucht man nicht mehr darauf zu bestehen, dass D Sterngebiet ist. Es genügt dann, anzunehmen, dass D offen ist.