27.11.2012

Bemerkungen zur 6. Vorlesungswoche Funktionentheorie WS 2012/13 (Weiss)

Kapitel II in Freitag-Busam wurde abgeschlossen. Im letzten Abschnitt §3 ging es um die Cauchy-Integral*formeln*, die elegante Anwendungen des Integral*satzes* von Cauchy sind. Die erste Integralformel besagt

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha \frac{f(z)}{z-a}\, dz\ .$$

Dabei wird angenommen, dass $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch (= komplex differenzierbar) ist, D offen in $\mathbb{C}$, $\alpha : [0, 2\pi] \to D$ eine Kreislinie in D (also $\alpha(t) = z_0 + re^{it}$ für ein festes $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$), deren Inneres ganz in D enthalten ist, und $a \in D$ ein Punkt im Inneren der dazugehörigen Kreisscheibe. Bemerkungen dazu:

- Es wird (wie gesagt!) vorausgesetzt, dass f in einer Umgebung der ganzen durch α umschlossenen Kreisscheibe definiert und komplex differenzierbar ist.
- Es wird nicht vorausgesetzt, dass a mit z_0, dem Mittelpunkt der von α umschlossenenen Kreisscheibe, übereinstimmt.
- Der Faktor $1/2\pi i$ soll nicht vergessen werden; leider passiert es mir immer wieder.

Die wesentliche Idee im Beweis dieser Cauchy-Integralformel ist die Beobachtung (auf der Grundlage vom Cauchy-Integral*satz*), dass die rechte Seite der Formel nicht sehr von der Wahl der Kreislinie abhängt. Deswegen können wir das gegebene α auch durch eine kleine Kreislinie vom Radius ε um den Punkt a ersetzen. Dann ergibt sich die Formel wie von selbst durch Grenzübergang, $\varepsilon \to 0$.

Die weiteren Cauchy-Integralformeln sind ähnlich aussehende Formeln für die höheren Ableitungen $f'(a)$, $f''(a)$ undsoweiter. Man erhält sie aus der ersten Integralformel, indem man nach a differenziert, und zwar (auf der rechten Seite der Formel) unter/hinter dem Integralzeichen. Das wird durch die Leibniz-Regel gerechtfertigt. Also erhält man beispielsweise für die erste Ableitung

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha \frac{d}{da} \frac{f(z)}{z-a}\, dz \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha \frac{f(z)}{(z-a)^2}\, dz\ .$$

Als einfache Anwendung von Cauchy's Integralformel für die erste Ableitung $f'(a)$ haben wir den Satz von Liouville beweisen können: *Eine analytische Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die beschränkt ist, ist konstant.* Hier bedeutet *beschränkt*, dass $|f(z)| \le C$ ist fuer eine feste reelle Zahl $C > 0$ und alle

$z \in \mathbb{C}$. (Eine analytische Funktion, die auf ganz $\mathbb{C}$ definiert ist, wie im Satz von Liouville, heisst auch *ganze Funktion*.)
Der Beweis von Liouville's Satz ist auch eine schöne Anwendung der Standard-Abschätzung

$$\left| \int_\beta g(z)\ dz \right| \leq \ell(\beta) \cdot K$$

die man benutzen darf, wenn man weiss, dass $|g(\beta(t))| \leq K$ ist für alle t im Definitionbereich der Kurve β. Genauer, wir setzen voraus, dass $g : D \to \mathbb{C}$ stetig ist, wobei $D \subset \mathbb{C}$, und $g : [c, d] \to D$ eine glatte oder stückweise glatte Kurve, und K eine nicht-negative reelle Zahl. Die Zahl $\ell(\beta)$ ist die Bogenlänge von β.