10.11.2012

Bemerkungen zur 4. und 5. Vorlesungswoche Funktionentheorie WS 2012/13 (Weiss)

Wir haben den grössten Teil von Kapitel II in Freitag-Busam durchgenommen, genauer, §1 und §2. Dabei geht es um Kurvenintegrale im Komplexen und das Auffinden von Stammfunktionen mit Hilfe von solchen Kurvnintegralen. Da das alles sehr schön bei Freitag und Busam nachzulesen ist, beschränke ich mich darauf, nur das Allerwichtigste zu betonen und Sie auf einige Abweichungen betreffend Terminologie aufmerksam zu machen.

Wir nehmen typischerweise an, dass wir eine offene Menge D in $\mathbb{C}$ haben und eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{C}$. Für eine glatte Kurve $\gamma : [a, b] \to D$ ist dann das Kurvenintegral von f längs γ definiert wie folgt:

$$\int_\gamma f(z)\ dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ dt\ .$$

Dazu ein paar Bemerkungen:

- $[a, b]$ soll ein kompaktes Intervall in $\mathbb{R}$ sein.
- Im Integranden auf der rechten Seite ist $\gamma'(t)$ eine komplexe Zahl, und der Punkt $\cdot$ zwischen $f(\gamma(t))$ und $\gamma'(t)$ bedeutet Multiplikation von komplexen Zahlen.
- Das Integral $\int_a^b$ auf der rechten Seite ist sonst eigentlich ein ganz gewöhnliches Integral, wie Sie es aus der Analysis I wahrscheinlich kennen; nur sollen Sie den Integranden in Realteil und Imaginärteil auseinandernehmen, getrennt integrieren und hinterher wieder zusammensetzen zu einer komplexen Zahl.
- Das Kurvenintegral ist so eingerichtet, dass im Falle der Existenz einer Stammfunktion F von f gilt

  $$\int_\gamma f(z)\ dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))\ .$$

  (Wir sagen, dass $F : D \to \mathbb{C}$ Stammfunktion von f ist, falls F komplex ableitbar ist in D und $F' \equiv f$ in D.) Also hängt in einem solchen Fall das Kurvenintegral nur von $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$ ab, aber nicht davon, wie sich die Kurve γ einen Weg von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$ bahnt.

Wir haben uns bei der Konstruktion von Stammfunktionen an eine Umkehrung (unter Bedingungen an D) der letzten Beobachtung gehalten: wenn das Kurvenintegral von f längs γ nur von $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$ abhängt, aber nicht davon, wie sich die Kurve γ einen Weg von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$ bahnt, dann *sollte* eine Stammfunktion F existieren. Dieser Glaube stellte sich als korrekt heraus unter der Bedingung, dass D wegzusammenhängend ist. (Siehe

Bemerkungen zu Definitionen weiter unten.)
Ausserdem wurde der folgende sehr wichtige Satz (von Cauchy) für Sterngebiete D bewiesen: Wenn $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch ist, dann hängt tatsächlich das Kurvenintegral von f längs einer glatten oder stückweise glatten Kurve $\gamma : [a, b] \to D$ nur von $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$ ab. Herzstück des Beweises war der Spezialfall, in dem γ ein geschlossenes Dreieck beschreibt. In diesem Fall ist es noch nicht einmal nötig, anzunehmen, dass D ein Sterngebiet ist; es genügt, wenn D offen ist und das von γ umschlossene Dreieck ganz in D enthalten ist.

Sterngebiet bedeutet: Teilmenge von $\mathbb{C}$, offen und sternförmig. Wahrscheinlich kennen Sie *sternförmig* aus den Analysisvorlesungen. *Gebiet* bedeutet: Teilmenge von $\mathbb{C}$, offen und zusammenhängend. (Daraus folgt auch: wegzusammenhängend, siehe Übungsaufgaben, Blatt 6.) Aus sternförmig folgt leicht zusammenhängend, deswegen sind Sterngebiete tatsächlich Gebiete.

Jetzt die Abweichungen.
Ich habe folgende Definition von *zusammenhängend* gewählt: Eine Teilmenge K von $\mathbb{R}^p$ ist *zusammenhängend*, wenn das Bild jeder stetigen Abbildung von K nach $\mathbb{R}$ ein Intervall ist. Ich habe *bogenzusammenhängend* überhaupt nicht benutzt, sondern stattdessen *wegzusammenhängend*. Eine Teilmenge K von $\mathbb{R}^p$ ist *wegzusammenhängend*, falls $\forall x, y \in K$ eine stetige Abbildung $g : [0, 1] \to K$ existiert derart, dass $g(0) = x$ und $g(1) = y$.
Ausserdem wurde folgendes benutzt, weil es bequem war: Wenn eine *offene* Teilmenge D von $\mathbb{R}^p$ wegzusammenhängend ist, dann lassen sich je zwei Punkte $x, y \in D$ durch eine stückweise lineare Kurve $\alpha : [0, 1] \to D$ verbinden, also $\alpha(0) = x$ und $\alpha(1) = y$. Dabei soll *stückweise linear* heissen, dass α stetig ist und dass wir eine Unterteilung

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k = b$$

mit endlich vielen Teilen finden können derart, dass α auf jedem der Intervalle $[t_{k-1}, t_k]$ nicht nur glatt ist, sondern sogar konstante Ableitung hat. Siehe Übungsaufgaben, Blatt 6.
Meistens ziehe ich es vor, $\int_\gamma f(z)\ dz$ zu schreiben statt

$$\int_\gamma f(\zeta)\ d\zeta$$

wie bei Freitag und Busam; gelegentlich habe ich das aber auch bereut. Die Bezeichnungen bei Kurvenintegralen sind ja immer etwas mysteriös; aber auch hier soll Ihnen das Anhängsel dz sagen, was die Integrationsvariable ist und was nicht. Wenn wir zum Beispiel ein Kurvenintegral von der Form

$$\int_\gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \, dz$$

haben, dann ist das z die Integrationsvariable, genauer $z = \gamma(t)$ für variables t aus einem Intervall von reellen Zahlen, während das z_0 sich den Verdacht gefallen lassen muss, eine komplexe Konstante zu sein.