27.10.2012

Bemerkungen zur dritten Vorlesungswoche Funktionentheorie WS 2012/13 (Weiss)

Es ging ungefähr um das, was in Kapitel I §§3,4,5 in Freitag-Busam enthalten ist. Begriff der Stetigkeit: wurde als bekannt angenommen und nur kurz erwähnt. Interessante Beispiele: (i) die Funktion Arg von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nach $\mathbb{R}$ ist nicht stetig, obwohl Sie es vielleicht erwartet haben; (ii) die Funktion $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = 0$ wenn $x < \sqrt{2}$ und $f(x) = 1$ wenn $x > \sqrt{2}$ ist stetig, obwohl Sie es vielleicht nicht erwartet haben.

Die Begriffe *offene Teilmenge von* $\mathbb{R}^p$, *abgeschlossene Teilmenge von* $\mathbb{R}^p$ und *kompakte Teilmenge von* $\mathbb{R}^p$ wurden ebenso als bekannt vorausgesetzt, aber kurz erwähnt. Wichtig dabei: die Definition von *kompakt* beginnt mit den schwierigen Worten *... zu jeder Überdeckung ... durch eine Familie von offenen Mengen ...*. Sie beginnt nicht mit den Worten *... es existiert eine Überdeckung ... durch eine Familie von offenen Mengen ...* Sie sollen sich also dazu merken $\forall$ (für alle, für jedes, zu jeder usw.), nicht $\exists$ (es existiert, es gibt, usw.) Gerade deswegen ist diese Definition so schwer zu handhaben: Sie müssen, wenn Sie Kompaktheit nach dieser Definition zeigen wollen, mit *allen* derartigen Überdeckungen rechnen, nicht nur mit der, die Ihnen gerade einfällt. (Glücklicherweise gibt es bei Teilmengen von $\mathbb{R}^p$ ein anderes Kriterium für Kompaktheit ... ein Satz, den Sie kennen sollen.) Andererseits, wenn Sie Nicht-Kompaktheit mit derselben Definition von Kompaktheit zeigen wollen, dann haben Sie es ziemlich gut: Sie müssen dann natürlich nur eine Überdeckung finden, für die es schiefgeht (weil die Negation einer Aussage $\forall$ *die-und-die gilt so-und-so* lautet: $\exists$ *eins von denen-und-denen, für das so-und-so nicht gilt*).

Die Abschnitte §4 und §5 wurden zusammen diskutiert (kann man beinahe sagen). Ich würde mit Hinblick auf die Fragen, die in der Vorlesung kamen, das Resultat so zusammenfassen.

(1) Wir kennen aus der Analysis von Funktionen einer Veränderlichen den folgenden Differenzierbarkeitsbegriff. Sei $D \subset \mathbb{R}$ und sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. *Wir sagen, dass f differenzierbar ist in $a \in D$, falls der Grenzwert*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert; der Grenzwert wird dann mit $f'(a)$ bezeichnet. Damit soll auch verstanden sein, dass a Häufungspunkt von D ist, denn sonst hat dieser Grenzwert nicht viel Sinn.

(2) Aus der Analysis von Funktionen mehrerer Veränderlicher wissen wir, dass dieser Differenzierbarkeitsbegriff mit Vorsicht verallgemeinert werden muss, wenn wir es mit $D \subset \mathbb{R}^p$ und einer Abbildung $f : D \to \mathbb{R}^q$ zu tun haben. Am besten setzen wir gleich voraus, dass D offen ist in $\mathbb{R}^p$. Wir stellen fest, dass es nicht sinnvoll ist, einen Ausdruck wie

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

einfach so hinzuschreiben, weil $x - a$ jetzt ein Vektor in $\mathbb{R}^p$ ist, durch den wir nicht einfach so teilen können. Das wäre also eine schlechte Verallgemeinerung. Stattdessen wird so verallgemeinert: wir sagen, dass f in $a \in D$ *total differenzierbar* ist, falls eine lineare Abbildung B von $\mathbb{R}^p$ nach $\mathbb{R}^q$ existiert derart, dass

$$f(x) = f(a) + B(x - a) + r(x)$$

wobei $r(x) \in \mathbb{R}^q$ sehr klein sein soll für x nahe bei a. Genauer,

$$\lim_{x \to a} \frac{r(x)}{|x - a|} = 0 \in \mathbb{R}^q \ .$$

Diese lineare Abbildung B ist dann die totale Ableitung von f im Punkt a und kann auch mit $f'(a)$ bezeichnet werden. Sie kennen B vielleicht besser als Matrix mit q Reihen und p Spalten. Im Falle $p = q = 1$ ist es eine 1×1-Matrix, die wir gerne zum Status einer Zahl degradieren.

(3) Sei jetzt $p = q = 2$ und D offen in $\mathbb{R}^2$. Wir erlauben uns, $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ zu verwechseln, wenn es uns gefällt; also $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ entspricht $x + iy \in \mathbb{C}$. Sei eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}^2$ gegeben und $a \in D$. Merkwürdigerweise wird es jetzt wieder sinnvoll, einen Ausdruck wie

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

hinzuschreiben. Genauer gesagt sieht es immer noch sinnlos aus, wenn wir darauf bestehen, dass $x - a$ ein Vektor mit zwei reellen Koordinaten ist, aber es wird sinnvoll, wenn wir $f(x) - f(a)$ und $x - a$ als komplexe Zahlen auffassen (mit Realteil und Imaginärteil). Denn es ist sinnvoll, eine komplexe Zahl durch eine andere zu teilen. Wenn wir diesen Gedanken weiter verfolgen, ergibt sich der Begriff der *komplexen Differenzierbarkeit* (von f, an der Stelle $a \in D$).

(4) Für den Fall einer Abbildung $f : D \to \mathbb{R}^2$, wobei D offen in $\mathbb{R}^2$, haben wir demnach *zwei* Begriffe von Differenzierbarkeit, die beide beanspruchen können, sinnvolle Verallgemeinerungen von (1) zu sein: *totale Differenzierbarkeit* wie in (2) und *komplexe Differenzierbarkeit* wie in (3). Es kann gefragt werden, wie sich diese Differenzierbarkeitsbegriffe zueinander verhalten. Wir haben das untersucht, mit dem Ergebnis, dass komplexe Differenzierbarkeit eine stärkere Bedingung ist als totale Differenzierbarkeit. Genauer: f ist komplex differenzierbar in $a \in D$ genau dann, wenn total differenzierbar und *ausserdem* für die ersten partiellen Ableitungen von f an der Stelle a die Gleichungen

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} \ , \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}$$

gelten. Oder mit anderen Worten, die totale Ableitungsmatrix $f'(a)$ muss die Form

$$\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}$$

haben. Diese Differentialgleichungen für die ersten partiellen Ableitungen heissen *partielle DGL von Cauchy-Riemann*.

Aus den partiellen DGL von Cauchy-Riemann für eine komplex differenzierbare Abbildung $f : D \to \mathbb{R}^2$ wie in (4) kann man unter Voraussetzung von etwas mehr gewöhnlicher Differenzierbarkeit (zweimal stetig differenzierbar im Sinne der partiellen Ableitungen) noch leicht die Laplace-Differentialgleichungen herleiten:

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = 0 \ , \qquad \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} = 0 \ .$$

Dass es für mich nicht leicht war, hat nichts zu bedeuten ausser z.B. Übermüdung. Auf jeden Fall soll man beachten, dass es sich um Differentialgleichungen handelt, die getrennt etwas von den Funktionen $f_1 : D \to \mathbb{R}$ und $f_2 : D \to \mathbb{R}$ verlangen. (Bei den Cauchy-Riemann DGL ist es dagegen nicht so, wie man bei genauerem Hinschauen sieht.)

Übungsblatt 4 handelt weitgehend von komplexer Differenzierbarkeit und den Cauchy-Riemann DGL sowie der Laplace DGL. Es sind starke Bedingungen mit merkwürdigen Konsequenzen.