20.10.2012

Bemerkungen zur zweiten Vorlesungswoche Fun.thie WS 2012/13 (Weiss)

Wir haben uns eng an Kapitel I §2 in Freitag-Busam gehalten: Konvergente Folgen und Reihen von komplexen Zahlen. Ein Höhepunkt war die Definition von exp, cos und sin als Funktionen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$, durch Potenzreihen. Wir sahen, dass exp als Funktion von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ nicht injektiv ist, sondern die Perioden $2k\pi i$ besitzt, $k \in \mathbb{Z}$. Eingeschränkt auf die Menge

$$S = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \mathrm{Im}\, z \leq \pi\}$$

gibt exp aber eine Bijektion $S \to \mathbb{C}^\bullet$, wobei $\mathbb{C}^\bullet = \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$, und wir können in diesem Sinn von einer inversen Funktion dazu sprechen. Das ist

$$\mathrm{Log} : \mathbb{C}^\bullet \to S \ ,$$

der Hauptzweig des Logarithmus. Warnung: Es gibt bei Log Probleme mit der Stetigkeit.

Ich fand den Beweis von 2.5. in Freitag-Busam (absolute Konvergenz von Reihen komplexer Zahlen impliziert gewöhnliche Konvergenz) etwas kurz. Es wird dabei zum Beispiel auch der *Satz von der monotonen Konvergenz* benutzt. Denn man will aus der Konvergenz von $\sum_n |z_n|$ auf die Konvergenz von $\sum_n |\mathrm{Re}\ z_n|$ und $\sum_n |\mathrm{Im}\ z_n|$ schliessen. Einzelheiten: Sei also

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n$$

eine absolut konvergente Reihe, wobei die z_n komplexe Zahlen sind. Dann wissen wir, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$$

konvergiert. Sei also die Summe dieser Reihe gleich B (eine reelle Zahl ≥ 0). Dann ist B eine obere Schranke für die Zahlen

$$|z_0|,\ |z_0| + |z_1|,\ |z_0| + |z_1| + |z_2|,\ |z_0| + |z_1| + |z_2| + |z_3|, \quad \text{usw.}$$

und damit auch eine obere Schranke für die Zahlen

$$|\mathrm{Re}\ z_0|,\ |\mathrm{Re}\ z_0| + |\mathrm{Re}\ z_1|,\ |\mathrm{Re}\ z_0| + |\mathrm{Re}\ z_1| + |\mathrm{Re}\ z_2|, \quad \text{usw.}$$

Also sind alle Zahlen der nicht absteigenden Folge (von reellen Zahlen)

$$|\mathrm{Re}\ z_0|,\ |\mathrm{Re}\ z_0| + |\mathrm{Re}\ z_1|,\ |\mathrm{Re}\ z_0| + |\mathrm{Re}\ z_1| + |\mathrm{Re}\ z_2|, \quad \text{usw.}$$

nicht grösser als B. Also besitzt diese Folge einen Grenzwert (Satz von der monotonen Konvergenz). Das heisst, die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\mathrm{Re}\ z_n|$$

ist konvergent. Das heisst, die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re}\ z_n$$

ist absolut konvergent. Deswegen können wir schliessen, dass diese Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re}\ z_n$ gewöhnlich konvergent ist (weil wir es aus der reellen Analysis wissen). Ebenso können wir einsehen, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Im}\ z_n$ gewöhnlich konvergiert. Das genügt dann.

Kommentare zu Log. Für $z \neq 0$ in $\mathbb{C}$ haben wir die praktische Formel

$$\mathrm{Log}(z) = \ln(|z|) + i\mathrm{Arg}(z)$$

wobei $\mathrm{Arg}(z)$ der Hauptwert vom Argument von z ist. (Übrigens schreibe ich ln für den natürlichen Logarithmus, anwendbar auf positive reelle Zahlen.) Zur Rechtfertigung dieser Gleichung sollte man nur zwei Dinge überprüfen:

(i) $\exp(\ln(|z|) + i\mathrm{Arg}(z)) = z$;

(ii) $\ln(|z|) + i\mathrm{Arg}(z)$ ist ein Element von $S = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \mathrm{Im}\ z \leq \pi\}$.

Denn Log war ja definiert worden als die Inverse der bijektiven Abbildung exp, wenn wir exp als eine bijektive Abbildung von S nach $\mathbb{C}^\bullet$ auffassen. Das Überprüfen von (ii) fällt leicht. Das Überprüfen von (i) ist auch nicht schwer, aber man sollte dann z in Polarform bereithalten! Sei also

$$z = r(\cos\varphi + i\ \sin\varphi)$$

wobei $r > 0$ und $-\pi < \varphi \leq \pi$. Dann ist $\ln(|z|) + i\mathrm{Arg}(z) = \ln(r) + i\varphi$ und damit

$$\begin{array}{llllll} & \exp(\ln(|z|) + i\mathrm{Arg}(z)) & = & \exp(\ln(r) + i\,\varphi) & = & e^{\ln(r)}(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ = & r(\cos\varphi + i\sin\varphi) & = & z\ . & & \end{array}$$