13.10.2012

Bemerkungen zur ersten Vorlesungswoche Fun.thie WS 2012/13 (Weiss)

In der ersten Vorlesungswoche wurde hauptsächlich das angesprochen, was auch in Kapitel 1 §1 von Freitag-Busam sehr schön zusammengefasst ist: Elementare Rechenregeln in $\mathbb{C}$ (speziell Division), Betrag und Argument von komplexen Zahlen, Darstellung von komplexen Zahlen in der Gauss-Argand Ebene, Verhalten von Betrag und Argument bei Multiplikation von komplexen Zahlen, Verhalten von Betrag und Argument beim Potenzieren von komplexen Zahlen (Satz von Euler und deMoivre), und was man beim Bestimmen n-ter Wurzeln wissen und beachten sollte. (Zum Beispiel haben wir festgestellt, dass die Zahl 1 in $\mathbb{C}$ fünf verschiedene 5te Wurzeln besitzt.)

Bemerkung: Ich habe mich etwas schuldig gemacht, indem ich die Bezeichnung $\mathrm{Arg}(z)$ für beliebige Argumente einer komplexen Zahl z benutzt habe. Sie sollte aber nach Freitag-Busam nur für den Hauptwert des Arguments benutzt werden. Demnach ist die Gleichung $\mathrm{Arg}(zw) = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(w)$ (wie ich sie wahrscheinlich angeschrieben habe) nur beinah richtig, aber nicht ganz richtig. Man muss eigentlich schreiben:

$$\begin{array}{rrcl} & \mathrm{Arg}(zw) & = & \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(w) \\ \textit{oder} & \mathrm{Arg}(zw) & = & \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(w) + 2\pi \\ \textit{oder} & \mathrm{Arg}(zw) & = & \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(w) - 2\pi\ . \end{array}$$

Zum Beispiel tritt der Fall $\mathrm{Arg}(zw) = \mathrm{Arg}(z)+\mathrm{Arg}(w)+2\pi$ ein, wenn $z = -i$ und $w = -i$.

In der zweiten Hälfte der Vorlesung am Do habe ich (etwas zu hastig) das Folgende vorgetragen. Es handelt sich dabei um einen Teil von einem Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra.

Satz. Sei $P(z)$ ein Polynom mit komplexen Koeffizienten, nicht konstant. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $P(z_0) \neq 0$. Dann hat die Funktion $z \mapsto |P(z)|$ von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{R}$ kein lokales Minimum an der Stelle z_0.

Beweis. Wir versuchen, $\beta \in \mathbb{C}$ zu finden derart, dass die differenzierbare Funktion

$$t \mapsto |P(z_0 + t\beta)|^2$$

von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ kein lokales Minimum bei $t = 0$ hat. [Das würde heissen, dass $t \in \mathbb{R}$ beliebig nahe bei Null existiert mit der Eigenschaft, dass $|P(z_0 + t\beta)|^2$ kleiner ist als $|P(z_0)|^2$. Das muss genügen.]
Wir setzen $z = z_0 + h$, das heisst $h = z - z_0$, und bemerken, dass sich $P(z) = P(z_0 + h)$ in der Form $P(z_0) + Q(h)$ schreiben lässt, wobei $Q(h)$

ein anderes Polynom (in der Variablen h) mit komplexen Koeffizienten ist, während $P(z_0)$ eine konstante komplexe Zahl ist. Ausserdem ist $Q(h)$ nicht konstant, wegen unserer Annahme betreffend $P(z)$, und $Q(0) = 0$. Also können wir schreiben

$$Q(h) = a_n h^n + a_{n+1} h^{n+1} + \cdots + a_r h^r$$

nach aufsteigenden Potenzen von h geordnet, mit $n \geq 1$ und $a_n \neq 0$. (Das heisst, h^n ist die kleinste Potenz von h, die im Polynom Q wirklich vorkommt, und h^r ist die grösste.) Also ist

$$P(z_0 + h) = P(z_0) + a_n h^n + a_{n+1} h^{n+1} + \cdots + a_r h^r \ .$$

Jetzt wählen wir $\beta \in \mathbb{C}$ so, dass $a_n \beta^n = -P(z_0)$ ist. Wir können das, weil wir gelernt haben, n-te Wurzeln in $\mathbb{C}$ zu bestimmen. Dann ist

$$\begin{aligned} |P(z_0 + t\beta)|^2 &= |P(z_0) + a_n (t\beta)^n + a_{n+1} (t\beta)^{n+1} + \cdots a_r (t\beta)^r|^2 \\ &= |P(z_0) - t^n P(z_0) + \text{höhere Potenzen von } t|^2 \\ &= |P(z_0)|^2 - 2|P(z_0)|^2 t^n + \text{höhere Potenzen von } t \ . \end{aligned}$$

Daraus können wir sehen, dass die ersten $n-1$ Ableitungen der Funktion $t \mapsto |P(z_0 + t\beta)|^2$ gleich Null sind, während die n-te strikt negativ ist. Also kein lokales Minimum bei $t = 0$. $\square$