21.02.2013

Bemerkungen zur 13. Vorlesungswoche Funktionentheorie WS 2012/13 (Weiss)

Es ging um den Residuensatz. Für die Formulierung brauchen wir drei mehr oder weniger neue Definitionen:

(1) Umlaufzahl
(2) Elementargebiet
(3) Residuum

1. *Umlaufzahl.* Sei $w \in \mathbb{C}$ und $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C} \smallsetminus \{w\}$ eine stückweise glatte geschlossene Kurve. Wir wollen zählen, wie oft die Kurve γ den Punkt w *umläuft.* Es ist nicht einfach, diesen Gedanken präzise zu machen. Die offizielle Definition ist

$$\chi(\gamma; w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - w}\, dz\ .$$

Dass diese Definition eine Chance hat, sinnvoll zu sein, kann man sehen, indem man für γ eine Kreislinie wählt. Dann ist nach Cauchy-Formel $\chi(\gamma; w) = 1$ falls w von der Kreisline umschlossen wird und die Kreisline im positiven Sinn durchlaufen wird; ausserdem $\chi(\gamma; w) = -1$ falls w von der Kreisline umschlossen wird und die Kreisline im negativen Sinn durchlaufen wird; und $\chi(\gamma; w) = 0$, falls w nicht von der Kreislinie umschlossen wird.
In Aufgabe 3 von Übungsblatt 12 wird auch angedeutet, warum $\chi(\gamma; w)$ immer eine ganze Zahl ist.
Ich hatte noch eine andere Definition vorgeschlagen. Ohne BdA ist $a = 0$, $b = 1$ und $w = 0 \in \mathbb{C}$, also $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$. Wir nehmen uns vor, die Umlaufzahl zu verstehen, indem wir den Definitionsbereich $[0, 1]$ von γ in n gleiche Teile aufteilen, mit $n \gg 0$. Nämlich so:

$$\chi(\gamma; w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Arg}\Big(\frac{\gamma(\frac{k}{n})}{\gamma(\frac{k-1}{n})}\Big)$$

wenn n gross genug ist. Sie können auch schreiben

$$\chi(\gamma; w) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Arg}\Big(\frac{\gamma(\frac{k}{n})}{\gamma(\frac{k-1}{n})}\Big).$$

Auf jeden Fall ist es nicht schwer, zu sehen, dass der Ausdruck

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Arg}\Big(\frac{\gamma(\frac{k}{n})}{\gamma(\frac{k-1}{n})}\Big)$$

immer eine ganze Zahl ist, egal, ob n gross genug ist oder nicht. Denn wir wissen

$$\mathrm{Arg}\Big(\frac{\gamma\big(\frac{k}{n}\big)}{\gamma\big(\frac{k-1}{n}\big)}\Big) = \mathrm{Arg}\Big(\gamma\big(\frac{k}{n}\big)\Big) - \mathrm{Arg}\Big(\gamma\big(\frac{k-1}{n}\big)\Big) + 2\pi q$$

wobei $q \in \{0, 1, -1\}$. Wenn man in der Summe $\sum_{k=1}^{n} \cdots$ diese Ersetzung macht und Wegheben beachtet, sieht man, dass die Summe ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist. (*Aufgabe*: Zeigen, dass diese beiden Definitionen von $\chi(\gamma; w)$ übereinstimmen.)

2. *Elementargebiet.* Ein Gebiet D in $\mathbb{C}$ soll *Elementargebiet* heissen, wenn jede analytische Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion F besitzt. Wir wissen also schon, dass Sterngebiete Elementargebiete sind (wegen Cauchy-Integralsatz für Sterngebiete). Ausserdem kann man sich leicht überlegen:

- Wenn $D = D_1 \cup D_2$, wobei D_1 und D_2 Elementargebiete sind und $D_1 \cap D_2$ (weg)zusammenhängend, nicht leer, dann ist auch $D_1 \cup D_2$ Elementargebiet.
- Gegeben eine aufsteigende Folge $D_0, D_1, D_2, \ldots$ von Elementargebieten, also $D_k \subset D_{k+1}$ für jedes $k \geq 0$. Dann ist auch die Vereinigung

  $$\bigcup_{k=0}^{\infty} D_k$$

  ein Elementargebiet.

3. *Residuum.* Sei $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch mit isolierter Singularität bei $b \in \mathbb{C}$. Das Residuum $\mathrm{Res}(f; b)$ ist der Koeffizient von $(z-b)^{-1}$ in der Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-b)^n \ ,$$

also a_{-1}. Diese Laurententwicklung ist natürlich gültig für ein Ringgebiet $D' = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-b| < \varepsilon\}$, bei genügend kleinem ε. Der Koeffizient a_{-1} ist uns wichtig zB aus folgendem Grund: *f besitzt eine Stammfunktion F in D' genau dann, wenn $a_{-1} = 0$.* Denn dann können wir die Stammfunktion als Laurentreihe hinschreiben,

$$F(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}} \frac{a_n}{n+1} (z-b)^{n+1}.$$

Praktische Regeln zum Ausrechnen von Residuen findet man in Freitag-Busam, III.6.4.

Residuensatz: Sei $D \subset \mathbb{C}$ Elementargebiet, $S \subset D$ endliche Teilmenge, $f : D \smallsetminus S \to \mathbb{C}$ analytisch, $\alpha : [a, b] \to D \smallsetminus S$ stückweise glatte geschlossene

Kurve. Dann ist

$$\int_\alpha f(z)\ dz \;=\; 2\pi i \sum_{s\in S} \mathrm{Res}(f;s)\chi(\alpha;s)\ .$$

Der Beweis, so wie er in Freitag-Busam steht, ist eigentlich ganz in Ordnung! Zu beachten: wenn $S=\emptyset$, dann steht auf der rechten Seite 0, und auf der linken Seite auch, weil wir ja dann eine Stammfunktion F für f haben. Mit ähnlicher Begründung kann man auch sagen, dass der Satz nicht mehr richtig ist, wenn wir die Voraussetzung D *ist Elementargebiet* herausnehmen.