15.02.2013

Bemerkungen zur 12. Vorlesungswoche Funktionentheorie WS 2012/13 (Weiss)

Isolierte Singularitäten: Fortsetzung. Was vom Abschnitt über isolierte Singularitäten noch geblieben war, betrifft hauptsächlich die wesentlichen Singularitäten. Für diese haben wir den Satz von Casorati-Weierstrass. Wenn $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch ist und an der Stelle a eine isolierte Singularität hat, die wesentlich ist, dann gibt es zu jedem $b \in \mathbb{C}$ eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D, die gegen a konvergiert, mit der Eigenschaft, dass die Folge $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen b konvergiert. Der Beweis ist nicht schwer.

Zusammengefasst, wir haben für die drei Typen von isolierten Singularitäten eine Charakterisierung durch Abbildungsverhalten. Wenn $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch ist und eine isolierte Singularität bei $a \in \mathbb{C}$ hat, dann ist diese

- hebbar genau dann, wenn $|f(z)|$ für alle z in einer kleinen Umgebung von a (ohne a selbst) beschränkt ist;
- ausserwesentlich aber nicht hebbar genau dann, wenn
$$\lim_{z\to a} |f(z)| = \infty \ ;$$
- wesentlich genau dann, wenn es zu jedem $b \in \mathbb{C}$ eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D, die gegen a konvergiert, mit der Eigenschaft, dass die Folge $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen b konvergiert.

Nächster Abschnitt: Laurentzerlegung und Laurententwicklung. Gegeben sind $r, R \in [0, \infty]$ mit $r < R$ und ein $a \in \mathbb{C}$. Sei

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - a| < R\}$$

der offene Kreisring zwischen den Kreisen vom Radius r und R um a. Der Satz von der Laurententwicklung besagt, dass jede analytische Funktion f von D nach $\mathbb{C}$ sich durch eine Reihe der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(z-a)^n$$

darstellen lässt. Hier wird (selbstverständlich) vorausgesetzt, dass die Reihen

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z-a)^n \ , \qquad \sum_{n=-\infty}^{-1} b_n(z-a)^n$$

(Nebenteil und Hauptteil) beide für sich konvergieren, für jedes z in D.
Daraus folgt aber auch leicht, dass die erste der beiden Teilreihen (Nebenteil) für jedes z vom Betrag $< R$ konvergiert, während die zweite (Hauptteil) für

jedes z vom Betrag $> r$ konvergiert. Anders ausgedrückt: der Konvergenzradius von

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-a)^n$$

is mindestens R und der Konvergenzradius von

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{-n} (z-a)^n$$

ist mindestens $1/r$. Also haben wir

$$f(z) = g(z) + h(1/z)$$

wobei g analytisch in der offenen Kreisscheibe um a vom Radius R und h analytisch in der offene Kreisscheibe um a vom Radius $1/r$. Ausserdem ist klar, dass $h(0) = 0$.
Die Zerlegung $f(z) = g(z) + h(1/z)$ heisst Laurentzerlegung von f. Dafür gibt es einen Eindeutigkeitssatz. (Nicht sehr schwer.) Daraus folgt auch die Eindeutigkeit der Laurent*reihe* von f.
Interessanter ist der Existenzbeweis. Ohne BdA ist $a = 0$. Jänich führt es darauf zurück, dass für $w \in D$ und $r_1, R_1 \in \mathbb{R}$ mit $r < r_1 < |w| < R_1 < R$ gilt

$$\int_{|z|=r_1} \frac{f(z)}{z-w}\, dz - \int_{|z|=R_1} \frac{f(z)}{z-w}\, dz + \int_{|z-w|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-w}\, dz = 0$$

wobei $\varepsilon > 0$ klein genug gewählt ist, so dass die drei Kreislinien disjunkt sind. (Bild malen.) Dass das so ist, folgt mit Mühe aus dem Cauchy-Integralsatz für Sterngebiete durch Einrichten von Hilfskurven (mit Wegheben und so weiter). Jänich hat da weniger Mühe, weil er eine stärkere Version vom Cauchy-Integralsatz hat. Eins von den drei Kurvenintegralen macht den Beitrag $2\pi i f(w)$. Ein anderes lässt sich durch eine konvergente Reihe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$ ersetzen unter Benutzung von

$$\frac{1}{z-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n / z^{n+1}$$

für $|w| < |z|$. Das letzte lässt sich durch eine konvergente Reihe der Form $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n w^n$ ersetzen unter Benutzung von

$$\frac{1}{z-w} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n / w^{n+1}$$

für $|w| > |z|$.

Jetzt ist es interessant, nochmal die isolierten Singularitäten mit Hilfe von Laurententwicklung zu betrachten. (Wann kam das eigentlich in der Vorlesung? Ich kann es nicht mehr rekonstruieren.) Sei $f : D \to \mathbb{C}$ gegeben, analytisch, mit isolierter Singularität an der Stelle a; ohne BdA ist $a = 0$. Dann ist für kleines $\varepsilon > 0$ die Menge

$$D' = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \varepsilon\}$$

in D enthalten. Bei D' handelt es sich um eines von den Ringgebieten, für die wir Laurententwicklungen diskutiert haben; hier ist natürlich der kleine Radius $r = 0$ und der grosse Radius $R = \varepsilon$. Also können wir die Laurentreihe von f für dieses Ringgebiet D' herstellen. Sie hat die Form

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n z^n \ .$$

Es ist leicht zu sehen, dass die isolierte Singularität (an der Stelle 0) hebbar ist genau dann, wenn die b_n für $n < 0$ alle Null sind. (Dann ist nämlich die Laurentreihe die gewöhnliche Potenzreihenentwicklung von f nach Beheben.) Ebenso ist es leicht zu sehen, dass die Singularität ausserwesentlich aber nicht hebbar ist genau dann, wenn ein $k < 0$ existiert mit $b_k \neq 0$ aber $b_\ell = 0$ für alle $\ell < k$. Und zwar ist dann $\operatorname{ord}(f;0) = k$, also Pol der Ordnung $-k$ (kein Druckfehler; bedenken, dass $-k > 0$ weil $k < 0$). Für die wesentlichen Singularitäten bleibt dann das, was bleibt, also: es gibt unendlich viele $n < 0$ mit $b_n \neq 0$.

Schlussbemerkung: Die Laurententwicklung einer analytischen Funktion hängt stark von dem Ringgebiet ab, in dem man entwickelt. In den Übungsaufgaben hatten wir ein Beispiel dafür. Gegeben war so etwas wie

$$f(z) = \frac{1}{z-1}$$

Dieses f ist natürlich analytisch in $\mathbb{C} \smallsetminus \{1\}$. Also isolierte Singularität an der Stelle 1. Deswegen ist man geneigt, die Laurentreihe von f für das Ringgebiet

$$\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-1| \ \}$$

(Zentrum 1, kleiner Radius 0, grosser Radius ∞) herzustellen. Aber f ist auch analytisch im Ringgebiet

$$\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| \ \}$$

(Zentrum 0, kleiner Radius 1, grosser Radius ∞). Die Laurentreihe von f für dieses Ringgebiet ist ein ganz anderes Ding.