05.01.2013

Bemerkungen zur 11. Vorlesungswoche Funktionentheorie WS 2012/13 (Weiss)

Es wurde zuerst der Satz von der *Gebietstreue* bewiesen. Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch, aber nicht konstant. Dann ist $f(D)$ (auch bekannt als Wertevorrat von f) wieder ein Gebiet.

Das wesentliche dabei ist, dass $f(D)$ wieder offen ist. Wir haben das mit Hilfe der Potenzreihenentwicklungen bewiesen. Auf diese Weise konnten wir die Behauptung darauf zurückführen, dass die Funktion $z \mapsto z^n$ von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ für jedes $n \geq 1$ surjektiv ist.

(Diese letzte Tatsache, $z \mapsto z^n$ ist surjektiv, gilt bekanntlich im Reellen nicht für gerades n. Das erklärt, warum der Satz von der Gebietstreue im Reellen falsch ist sogar dann, wenn sich die Funktion lokal durch Potenzreihen darstellen lässt. Beispiel: sin als Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ lässt sich prima durch eine Potenzreihe darstellen, ist aber nicht gebietstreu, weil der Wertevorrat $\sin(\mathbb{R})$ keine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist.)

Als Korollar zur Gebietstreue gab es das *Maximumprinzip*. Ich formuliere es gerne in zwei Versionen:

(1) Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch, aber nicht konstant. Dann nimmt die Funktion $z \mapsto |f(z)|$ von D nach $\mathbb{R}$ kein Maximum in D an.

(2) Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch, aber nicht konstant; sei K eine kompakte Teilmenge von D. Wenn $z \in K$ die Eigenschaft hat, dass $|f(z)| \geq |f(w)|$ für alle $w \in K$, dann ist z Randpunkt von K. (Das heisst, es gibt kein $\varepsilon > 0$ derart, dass die offene Kreisscheibe vom Radius ε um z ganz in K enthalten ist).

Bei der Formulierung (2) ist zu beachten, dass es bei nichtleerem K ein solches z garantiert gibt, weil die stetige Funktion $|f|$ auf der kompakten Menege K ein Maximum annehmen muss.

Um (1) zu zeigen, überlegt man sich, dass die offene Teilmenge $f(D)$ von $\mathbb{C}$ kein Element von maximalem Betrag enthalten kann, weil sie sonst eben nicht offen wäre. Um (2) aus (1) zu folgern: angenommen, es gibt ein $\varepsilon > 0$ derart, dass die offene Kreisscheibe $D' = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z| < \varepsilon\}$ ganz in K enthalten ist. Dann ist die Einschränkung von f auf D' eine nichtkonstante analytische Funktion, die an der Stelle $z \in D'$ ein Maximum des Betrages annimmt. Widerspruch zu (1).

Das Maximumprinzip hat seinerseits viele Anwendungen. Eine besonders hübsche Anwendung ist das Lemma von Schwarz. Sei $\mathbb{E}$ die offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$. Sei $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ analytisch mit $f(0) = 0$. *Dann ist*

$|f(z)| \leq |z|$ *für alle* $z \in \mathbb{E}$.
Der Beweis ist listig, weil er das Maximumprinzip nicht auf f anwendet, sondern auf die Funktion $g(z) = f(z)/z$ von $\mathbb{E}$ nach $\mathbb{C}$. Aus dieser Beweisführung folgt noch etwas mehr. Wenn $|f(z)| = |z|$ für irgendein $z \in \mathbb{E}$, oder wenn $|f'(0)| = 1$, dann nimmt g ein Maximum des Betrages an in $\mathbb{E}$, muss also konstant sein, und deshalb existiert $\xi \in \mathbb{C}$ vom Betrag 1 so dass $f(z) = \xi z$ für alle $z \in \mathbb{E}$.
Mit dem Schwarz'schen Lemma konnten wir alle analytischen Abbildungen von $\mathbb{E}$ nach $\mathbb{E}$ bestimmen, die umkehrbar sind als analytische Abbildungen. Diese bilden natürlich eine Gruppe mit Zusamensetzung (Hintereinanderausführung) als Gruppenoperation. In einer der wöchentlichen Uebungsaufgaben geht es um eine genauere Beschreibung dieser Gruppe.

Zweite Hälfte der 11ten Woche: Isolierte Singularitäten (Kapitel III§4 in Fretiag-Busam). Es ist ein leichter, hübscher Abschnitt, den ich eigentlich ganze gerne in einem 2stündigen Block abgehandelt hätte. Habe ich aber nicht ganz geschafft.
Erstmal Definition: Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch und $a \notin D$. Wir nehmen an, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert derart, dass alle $z \in \mathbb{C}$ mit $0 < |z-a| < \varepsilon$ zu D gehören. Dann sagen wir, dass a eine *isolierte Singularitaat* von f ist. Diese Definition ist etwas merkwürdig, wie ich betont habe, weil sie eigentlich keine Forderungen an f stellt, sondern nur Forderungen an D und a.

Auf dieser Grundlage machen wir zwei oder drei weitere Definitionen. Erstens, eine isolierte Singularität (Bezeichnungen wie oben) heisst *hebbar*, wenn sich f zu einer analytischen Funktion auf $D \cup \{a\}$ fortsetzen lässt. Zweitens, eine isolierte Singularität heisst *ausserwesentlich*, wenn ein $k \in \mathbb{N}$ existiert derart, dass die Funktion $z \mapsto (z-a)^k f(z)$ eine hebbare Singularität an der Stelle a hat. (Also ist eine hebbare Singularitet auch eine ausserwesentliche Singularität.) Drittens, alle übrigen isolierten Singularitäten sollen *wesentliche* Singularitäten heissen.
Beispiel: Sei $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $h(z) = \sin(z)/z$ für $z \in D$. Dieses h hat eine hebbare Singularität an der Stelle $a = 0$. (Warum?) Sei $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $g(z) = \sin(z)/z^3$ für $z \in D$. Dieses g hat eine ausserwesentliche Singularität an der Stelle $a = 0$.

Zur Erkennung von hebbaren Singularitäten gibt es das schöne Kriterium von Riemann: Mit Bezeichnungen wie oben hat f genau dann eine hebbare Singularität bei a, wenn f in einer Umgebung von a beschränkt ist. (Genauer: ... wenn es reelle Zahlen $\varepsilon > 0$ und $K > 0$ gibt derart, dass $|f(z)| < K$ für alle $z \in D$ mit $|z - a| < \varepsilon$.)
Beweisidee für die interessante Richtung: Wir nehmen an, dass f in einer

Umgebung von a beschränkt ist, unter Beachtung der Tatsache, dass $f(a)$ erstmal nicht definiert ist. Wir machen eine neue Funktion definiert in $D \cup \{a\}$ durch $z \mapsto (z-a)^2 f(z)$ für $z \in D$ und $a \mapsto 0$. Diese neue Funktion ist analytisch, wie man leicht sieht (mit Deutung von *analytisch* als *komplex differenzierbar*). Daher besitzt sie eine Potenzreihenentwicklung mit Entwicklungspunkt a. Aus der Potenzreihenentwicklung kann man sehen, dass sich die neue Funktion durch $z \mapsto (z-a)^2$ teilen lässt. Damit ist f rekonstituiert, aber jetzt auch definiert an der Stelle a. Also Singularität behoben.

Eine ausserwesentliche (isolierte) Singularität von f, die nicht hebbar ist, nennt man auch *Pol*.

Sei jetzt $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch und $a \in \mathbb{C}$ so, dass entweder $a \in D$ (also f definiert an der Stelle a) oder $a \notin D$ und f eine ausserwesentliche (isolierte) Singularität hat bei a. Wir lassen erstmal nicht zu, dass f in einer Umgebung von a konstant gleich Null ist. Dann können wir die *Ordnung von f an der Stelle a* definieren, eine ganze Zahl. Es geht so. Wir wissen, dass sich f in einer Umgebung von a schreiben lässt in der Form

$$f(z) = \sum_{n=r}^{\infty} b_n (z-a)^n$$

wobei $r \in \mathbb{Z}$ so gewählt ist, dass $b_r \neq 0$. (Dazu wählen wir erstmal $k \in \mathbb{N}$ so dass $z \mapsto (z-a)^k f(z)$ eine hebbare Singularität bei a hat. Dann haben wir dafür eine gewöhnliche Potenzreihenentwicklung, Konvergenzradius > 0, mit nicht-negativen Potenzen von $(z-a)$. Dann multiplizieren wir durch mit $(z-a)^{-k}$; danach können natürlich negative Potenzen von $(z-a)$ auftreten.) Wir setzen

$$\mathrm{ord}(f;a) = r\ .$$

In Worten: die Ordnung von f an der Stelle a ist r. Natürlich sollte man sich überlegen, dass das wohldefiniert ist; haben wir gemacht.
Im Fall $\mathrm{ord}(f;a) = k$ mit $k > 0$ kann man auch sagen: f hat eine Nullstelle der Ordnung k bei a. Im Fall $\mathrm{ord}(f;a) = -k$ mit $k > 0$ kann man auch sagen: f hat einen Pol der Ordnung k bei a. In dem Fall, wo f in einer Umgebung von a konstant gleich Null ist (das wir jetzt doch zugelassen), schreiben wir $\mathrm{ord}(f;a) = +\infty$.

Für das Verhalten von $\mathrm{ord}(f;a)$ bei Addition und Multiplikation von Funktionen gibt es ein paar Regeln. Eine der wöchentlichen Uebungsaufgaben handelte davon.