04.01.2013

Bemerkungen zur 10. Vorlesungswoche Funktionentheorie WS 2012/13 (Weiss)

Diese Vorlesungswoche bestand wegen Probeklausur nur aus der Montagsvorlesung. Trotzdem wurde an dem Montag eine ganze Menge vorgestellt. Sehr wichtig ist der folgende Satz, der eigentlich eine leichte Folgerung aus den Cauchy-Integralformeln ist. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch und $a \in D$. Die offene Kreischeibe vom Radius R und Zentrum a möge ganz in D enthalten sein. *Dann lässt sich f in dieser Kreisscheibe als Potenzreihe schreiben,*

$$f(z) = b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + b_3(z-a)^3 + \cdots ,$$

womit auch gesagt sein soll, dass der Konvergenzradius $\geq R$ ist.

Dazu eine kleine Bemerkung: Wenn man schon weiss, dass f sich in einer Umgebung von a als Potenzreihe darstellen lässt, dann hat man auch sofort eine Beschreibung für die Koeffizienten $b_0, b_1, b_2, \ldots$ dieser Potenzreihe. Es ist nämlich

$$f^{(k)}(a) = k! \cdot b_k$$

wie man durch k-faches Ableiten der Potenzreihe im Punkt a feststellen kann. (Man sollte rechtfertigen, dass gliedweises k-faches Ableiten der Potenzreihe in diesem Fall die korrekte k-te Ableitung liefert. Siehe Bemerkungen zur 9. Vorlesungswoche. Die Sätze von Weierstrass genügen, aber es geht auch direkter.)

Noch eine Bemerkung: mit diesem Satz haben wir eine neue Charakterisierung von analytischen Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$, wobei D offen, die sehr bequem ist. Statt zu sagen *analytisch* bedeutet *komplex differenzierbar*, können wir jetzt sagen: *analytisch* bedeutet *lokal beschreibbar durch Potenzreihen*. (Dabei bedeutet *lokal*, dass in einer kleinen Umgebung von jedem Punkt $a \in D$ undsoweiter.) Diese neue Charakterisierung wird in den nächsten Wochen bis ggf. zur Ohnmacht aller Beteiligten benutzt werden.

Der Beweis ging ungefähr so. OBdA ist $a = 0$. Wir wählen ein kleines $\varepsilon > 0$. Wir wissen wegen der ersten Cauchy-Integralformel

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R-\varepsilon} \frac{f(z)}{z-w}\, dz$$

für alle w mit der Eigenschaft $|w| < R - \varepsilon$, wobei das Integral ein Kurvenintegral ist (über eine Kurve, die den Kreis vom Radius $R - \varepsilon$ um den Nullpunkt im positiven Sinn durchläuft). Wir halten w mal ganz fest und schauen uns den Integranden genauer an und schreiben dafür

$$\frac{f(z)}{z} \cdot \frac{1}{1 - w/z}$$

wobei $|w/z| = |w|/|z| < 1$. Dann können wir dafür auch schreiben

$$\frac{f(z)}{z}(1 + w/z + w^2/z^2 + w^3/z^3 + \cdots) = \sum_{n=0}^{\infty} w^n f(z) \cdot z^{-n-1}$$

so dass

$$2\pi i \cdot f(w) = \int_{|z|=R-\varepsilon} \frac{f(z)}{z - w}\, dz = \int_{|z|=R-\varepsilon} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} w^n f(z) \cdot z^{-n-1} \Big)\, dz$$

Jetzt geht es darum, ob wir das Summenzeichen (für die Reihe im Integranden) aus dem Integral herausziehen können. Es handelt sich da um eine Reihe von Funktionen

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(z) \cdot z^{-n-1} w^n$$

in der Variablen z, die sämtlich auf der Kreislinie K vom Radius $R-\varepsilon$ um 0 definiert sind (wo sie sonst noch definiert sein könnten, interessiert uns jetzt gerade nicht). Man kann leicht sehen, dass diese Funktionsreihe gleichmässig auf K konvergiert! Deswegen ist die Vertauschung von Integration und Summierung erlaubt. Also erhalten wir

$$2\pi i \cdot f(w) = \int_{|z|=R-\varepsilon} \frac{f(z)}{z - w}\, dz \overset{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\int_{|z|=R-\varepsilon} f(z) \cdot z^{-n-1}\, dz \Big) w^n$$

wobei ich ein Ausrufezeichen über das wichtige Gleicheitszeichen gesetzt habe. Damit haben wir die Potenzreihenentwicklung, gültig für w mit Betrag $< R - \varepsilon$. Die Koeffizienten sind

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R-\varepsilon} f(z) \cdot z^{-n-1}\, dz$$

wofür wir dann allerdings nach den Cauchy-Integralformeln auch

$$b_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

schreiben dürfen. (Was wir ohnehin erwarten mussten.) Dann sieht man besser, dass es nicht von ε abhängt.

Als Vorbereitung zu dem wichtigen Satz oben gab es einige Beispiele zu Potenzreihenentwicklungen. (Ich habe die Funktion $f(z) = z^{-1}$ genommen, definiert in $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, und an verschiedenen Stellen in eine Potenzreihe entwickelt, zum Beispiel Entwicklungspunkt 1 und Entwicklungspunkt $2i$.)

Als Nachbereitung gab es Regeln zum Rechnen mit Potenzreihen (Freitag-Busam Kapitel III§2, Seite 110).

Dann war gerade noch Zeit für einen weiteren erstaunlichen Satz: den *Identitätssatz* für analytische Funktionen. Hier wird angenommen, dass $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet ist und $f, g : D \to \mathbb{C}$ zwei analytische Funktionen. Die Menge $K = \{z \in D \mid f(z) = g(z)\}$ soll (mindestens) einen Häufungspunkt in D haben. *Dann ist* $f = g$.
Der Beweis ist aber ganz einfach. OBdA ist $g = 0$ und wir müssen zeigen $f \equiv 0$. Jetzt ist K die Menge der Nullstellen von f. Man sieht leicht, dass die Menge L der Häufungspunkte von K in D eine abgeschlossene Teilmenge von D ist. Andererseits kann man auch sehen, wegen der lokalen Potenzreihenentwickelbarkeit von f, dass jeder Punkt von L eine kleine offene Umgebung in D besitzt, in der f gleich Null ist. Also ist L offen. Nach Voraussetzung ist $L \neq \emptyset$. Also ist $L = D$, denn D ist ja zusammenhängend. Also ist $f \equiv 0$.

Beispiel: wenn $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion ist und wenn

$$f(1/n) = \sin(1/n)$$

für alle positiven ganzen Zahlen n, dann folgt daraus schon $f(z) = \sin(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.