30.11.2012

# Übungsblatt 9 zu Funktionentheorie WS 2012/13 (Weiss)

*Hauptsächlich Wiederholung ...*

**1.** Sei $f : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C}$ analytisch. Man zeige, dass $f$ genau dann eine Stammfunktion $F : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C}$ besitzt, wenn

$$\int_\alpha f(z)\ dz \ = \ 0$$

wobei $\alpha(t) = e^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$. (Das heisst, $\alpha$ durchläuft den Einheitskreis im positiven Sinn.)

**2.** (a) Kurz erklären: Jede $\mathbb{R}$-lineare Abbildung von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ kann in der Form $z \mapsto vz + w\bar{z}$ geschrieben werden, mit $v, w \in \mathbb{C}$. (Haben wir eigentlich schon auf einem älteren Übungszettel gehabt.)
(b) Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ eine Abbildung, die im Punkt $a \in D$ total ableitbar ist als Abbildung von $D \subset \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ (aber nicht unbedingt komplex ableitbar). Die Matrix der partiellen ersten Ableitungen von $f$ an der Stelle $a$ ist die Matrix einer $\mathbb{R}$-linearen Abbildung, die wie in Teil (a) der Aufgabe auch in der Form $z \mapsto v_a z + w_a \bar{z}$ geschrieben werden kann. Man zeige

$$w_a \ = \ \lim_{r \to 0} \left( \frac{1}{2\pi r^2 i} \int_{\alpha_r} f(z)\ dz \right)$$

wobei $\alpha_r$ eine Kreislinie vom Radius $r$ um den Punkt $a$ im mathematisch positiven Sinn durchläuft.

**3.** Man bestimme

$$\int_\alpha \sin(z^{-1})\ dz$$

wobei $\alpha$ den Einheitskreis im positiven Sinn durchläuft.
*Empfohlene Methode*: Sei $\alpha_r$ eine Kreislinie vom Radius $r$ um den Nullpunkt. Zeigen Sie in Anlehnung an den Beweis der Cauchy-Integralformel(n), dass

$$K(r) := \int_{\alpha_r} \sin(z^{-1})\ dz$$

nicht von $r > 0$ abhängt. Lassen Sie $r$ gegen $\infty$ gehen. Dabei können Annäherungen wie $\sin w \approx w$ benutzt werden, für $w \in \mathbb{C}$ mit kleinem Betrag $|w|$, aber dann mit Fehlerabschätzung.

**4.** Was ist der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{n\ln n}$$

und für welche $z$ auf dem Rand des Konvergenzkreises konvergiert die Reihe?

*Punkte:* 10, 3+14, 13, 10.