23.11.2012

Übungsblatt 8 zu Funktionentheorie WS 2012/13 (Weiss)

Wiederholung ...

1. [Hier ist ein Argument dafür, dass aus *absoluter Konvergenz* bei Reihen von komplexen Zahlen die gewöhnliche Konvergenz folgt. Es ist nicht genau das Argument, das ich in der Vorlesung gegeben habe. Es gefällt mir besser. Sehen Sie sich die Definition von *absoluter Konvergenz* für Reihen von komplexen Zahlen z.B. bei Freitag-Busam an.]
Sei $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ eine absolut konvergente Reihe, wobei $w_n \in \mathbb{C}$ für alle n. Man zeige, dass die Partialsummen $s_0, s_1, s_2, s_3, \ldots$ der Reihe eine Cauchy-Folge im metrischen Raum $\mathbb{C}$ bilden. [Dabei ist $s_k = \sum_{n=0}^{k} w_n$.]
Der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} s_k$ existiert demnach (*welche Eigenschaft des metrischen Raumes $\mathbb{C}$ wird hier benutzt*?) und er ist die Zahl, gegen die die Reihe konvergiert.— Wie ist das anwendbar auf die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

für jedes beliebige $z \in \mathbb{C}$?

2. (a) Wieviele Lösungen in $\mathbb{C}$ hat die Gleichung $z^{15} = 1$? Zeigen Sie, dass die Summe aller Lösungen gleich Null ist.
(b) [Vergleiche mit Übungsblatt 3 Aufgabe 1(b).] Sei w eine dritte Wurzel von 1, aber $w \neq 1$. Wir setzen

$$f(z) = \frac{\exp(z) + \exp(wz) + \exp(w^2 z)}{3}.$$

Zeigen Sie, dass

$$f(z) = 1 + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^9}{9!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{3k}}{(3k)!}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie ausserdem, dass die Funktion f mit ihrer dritten Ableitung übereinstimmt.

3. (a) Sei $t \in \mathbb{R}$ fest, kein ganzzahliges Vielfaches von 2π. Man zeige, dass eine reelle Zahl $C > 0$ existiert derart, dass

$$\Big| \sum_{n=1}^{k} \cos(nt) \Big| < C$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. *Hinweis*: es hat etwas mit komplexen Zahlen zu tun.
(b) Mit Voraussetzungen wie in (a) zeige man, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{n}$$

konvergiert. *Hinweis*: sei $b_n = \cos(nt)$ und $c_n = 1/n$. Dann ist

$$\begin{aligned} c_n b_n + c_{n+1} b_{n+1} + \cdots + c_{n+m} b_{n+m} &= c_n(b_m + b_{m+1} + b_{m+2} + \cdots + b_{m+n}) \\ &- (c_n - c_{n+1})(b_{m+1} + b_{m+2} + \cdots + b_{m+n}) \\ &- (c_{n+1} - c_{n+2})(b_{m+2} + \cdots + b_{m+n}) \\ &- \qquad \cdots \end{aligned}$$

4. Sei $K \subset \mathbb{C}$ die Vereinigung der reellen Achse mit der imaginären Achse, also $K = \{x + yi \in \mathbb{C} \mid x = 0 \text{ oder } y = 0\ \}$. Sei $f : K \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Man zeige, dass f genau dann komplex differenzierbar ist [Def. zum Beispiel in Freitag-Busam, Kapitel II §4], wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- die Funktionen $x \mapsto \text{Re } f(x)$, $x \mapsto \text{Im } f(x)$, $y \mapsto \text{Re } f(iy)$ und $y \mapsto \text{Im } (iy)$, definiert für $x, y \in \mathbb{R}$, sind differenzierbar im gewöhnlichen Sinn;
- die Cauchy-Riemann-Bedingung für die partiellen Ableitungen von $\text{Re } f$ und $\text{Im } f$ im Punkt $0 \in K$.

Punkte: 10, 8+7, 10+7, 8.