16.11.2012

Übungsblatt 7 zu Funktionentheorie WS 2012/13 (Weiss)

1. In Freitag-Busam wird behauptet, dass aus der Cauchy-Integralformel direkt die *Mittelwertgleichung* folgt: nämlich

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\, dt\ .$$

Dabei wird angenommen, dass $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch ist, wobei D offen ist und alle komplexen Zahlen z mit $|a - z| \leq r$ enthält. Erklären Sie mal, wie das genau geht. [*Siehe auch Aufgabe 4 auf Blatt 4, in der dieselbe Mittelwertgleichung mit anderen Methoden und unter etwas stärkeren Voraussetzungen bewiesen wird.*]

2. (a) Man bestimme

$$\int_\alpha \frac{\cos z}{z + w}\, dz$$

als Funktion von w, wobei α den Kreis vom Radius 1 um $0 \in \mathbb{C}$ durchläuft, im mathematisch positiven Sinn (gegen den Uhrzeigersinn). Dabei soll $|w| \neq 1$ angenommen werden.

(b) Man bestimme

$$\int_\gamma \left(\frac{z}{z-1} \right)^n dz$$

wobei γ einen Kreis vom Radius 1 um 1 beschreibt (im mathematisch positiven Sinn).

(c) Man bestimme

$$\int_\gamma \frac{z}{z^3 - 1}\, dz$$

wobei γ einen Kreis vom Radius 2 um 0 beschreibt (im mathematisch positiven Sinn).

3. Sei $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\alpha(t) = e^{it}$. Sei K der Einheitskreis in $\mathbb{C}$, also das Bild von α. Sei $V = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Für eine stetige Funktion $f : K \to \mathbb{C}$ sei $\Phi_f : V \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\Phi_f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha \frac{f(z)}{z - a}\, dz\ .$$

[*Korrektur der ursprünglichen Aufgabenstellung, 23.11.: der Faktor* $1/2\pi i$ *war ausgelassen worden.*] Man zeige:

(i) Φ_f ist analytisch in V.

(ii) $\Phi_{f+g} = \Phi_f + \Phi_g$ und $\Phi_{c \cdot f} = c \cdot \Phi_f$ (wobei f und g stetige Funktionen von K nach $\mathbb{C}$ sind und $c \in \mathbb{C}$).

(iii) Wenn es eine stetige Funktion $G : K \cup V \to \mathbb{C}$ gibt derart, dass die Einschränkung $G_{|V}$ analytisch ist und $G_{|K} = f$, dann ist $G_{|V} = \Phi_f$.

Man bestimme Φ_f in den folgenden Fällen: $f(z) = z$, $f(z) = \mathrm{Re}\, z$. Ist es in allen Fällen richtig, dass G wie in (iii) existiert?

4. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion (überall komplex differenzierbar). Sei $n \in \mathbb{N}$. Man zeige: wenn es eine reelle Zahl C gibt, so dass $|f(z)| \leq C|z|^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$, dann ist f ein Polynom vom Grad höchstens n.

Punkte: 5, 5+5+5, 20, 10.