09.11.2012

Übungsblatt 6 zu Funktionentheorie
WS 2012/13 (Weiss)

1. Sei D offen in $\mathbb{R}^p$ und wegzusammenhängend. Man zeige: zu je zwei Elementen $x, y \in D$ gibt es eine stückweise lineare (stetige) Kurve $\alpha : [0, 1] \to D$ mit $\alpha(0) = x$ und $\alpha(1) = y$.
[*D wegzusammenhängend bedeutet: $\forall x, y \in D$ existiert eine stetige Abbildung $g : [0, 1] \to D$ derart, dass $g(0) = x$ und $g(1) = y$.*]

2. Sei D eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^p$. Wir definieren eine Relation W auf der Menge D wie folgt: xWy genau dann, wenn es eine stetige Abbildung $g : [0, 1] \to D$ gibt derart, dass $g(0) = x$ und $g(1) = y$. Man zeige:

- W ist eine Äquivalenzrelation.
- Die Äquivalenzklassen sind wieder offene Teilmengen von $\mathbb{R}^p$.

Daraus soll geschlossen werden: wenn D nicht wegzusammenhängend ist, dann ist D nicht zusammenhängend.
[*Nach der Definition, die ich in der Vorlesung gegeben habe, ist eine Teilmenge K von $\mathbb{R}^p$ zusammenhängend genau dann, wenn das Bild jeder stetigen Abbildung von K nach $\mathbb{R}$ ein Intervall ist. Es ist wichtig, dass Ihre Definition von* Intervall *mit der, die ich benutze, im Einklang ist! Im Zweifelsfall bei Tutor nachfragen.*]

3. (a) Man zeige, dass $\mathbb{C}^\bullet = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ die Vereinigungsmenge von zwei Sterngebieten ist. [*Eine offene Teilmenge D von $\mathbb{C}$ ist ein* Sterngebiet, *wenn ein $z_* \in D$ existiert derart, dass für jedes $z \in D$ die Verbindungsstrecke von z nach z_*, also $\{ z + t(z_* - z) \mid 0 \leq t \leq 1\}$, ganz zu D gehört.*]
(b) Sei $f : \mathbb{C}^\bullet \to \mathbb{C}$ irgendeine analytische Funktion. Es soll gezeigt werden, dass eine Zahl $w_f \in \mathbb{C}$ existiert mit der folgenden Eigenschaft. Für jede geschlossene glatte Kurve α, die in $\mathbb{C}^\bullet$ verläuft, ist

$$\int_\alpha f(z)\, dz$$

ein ganzzahliges Vielfaches von w_f. [*Dazu kann* (a) *benutzt werden.*]

4. Man bestimme das Kurvenintegral

$$\int_\gamma \frac{1}{\exp(z) - 1}\, dz$$

wobei γ den Einheitskreis im Uhrzeigersinn durchläuft.

5. Gegeben sei $P(z)$, ein Polynom vom Grad ≥ 1 mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$. Dann ist $f(z) = P'(z)/P(z)$ definiert da, wo $P(z) \neq 0$. Wir wollen uns das

Kurvenintegral

$$\int_{\alpha_R} f(z)\; dz$$

ansehen, wobei α_R einen Kreis vom Radius R um den Nullpunkt durchläuft, im entgegengesetzten Uhrzeigersinn. Für genügend grosses R ist das sinnvoll.

- Man bestimme den Grenzwert für $R \to \infty$ von $\int_{\alpha_R} f(z)\; dz$.
- Falls sich herausstellt, dass dieser Grenzwert von Null verschieden ist, können Sie daraus einen Beweis für eine bekannte, aber dennoch interessante Tatsache herleiten. Was ist diese Tatsache und wie geht der Beweis?

Punkte: 13, 5, 4+8, 10, 10.