02.11.2012

Übungsblatt 5 zu Funktionentheorie WS 2012/13 (Weiss)

1. (a) Man beweise, dass die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = z$ analytisch (komplex differenzierbar) ist in ganz $\mathbb{C}$.

(b) Sei n eine natürliche Zahl, $n > 0$. Aus der Produktregel soll hergeleitet werden, dass $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = z^n$ analytisch ist in ganz $\mathbb{C}$, mit Ableitung $f'(z) = nz^{n-1}$.

(c) Beweisen Sie Behauptung II.1.5.5 aus Freitag-Busam: Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die eine Stammfunktion F besitzt ($F' = f$, also F analytisch). Dann gilt für jede in D verlaufende glatte Kurve $\alpha : [a, b] \to D$

$$\int_\alpha f(z)\ dz = F(\alpha(b)) - F(\alpha(a))\ .$$

2. (a) Man bestimme

$$\int_\alpha \bar{z}\ dz$$

wobei α eine Kreislinie vom Radius $R > 0$ um den Nullpunkt durchläuft (angefangen bei der reellen Zahl R, im entgegengesetzten Uhrzeigersinn).

(b) Man bestimme $\int_\alpha \bar{z}\ dz$, wobei α eine Kreislinie vom Radius $R > 0$ um eine feste komplexe Zahl w durchläuft (angefangen bei $w + R$, im entgegengesetzten Uhrzeigersinn).

(c) Man bestimme $\int_\alpha \bar{z}\ dz$, wobei α den Rand eines Dreiecks mit den Ecken u, v, w durchläuft ($u, v, w \in \mathbb{C}$), im entgegengesetzten Uhrzeigersinn. Das Resultat soll mit der Fläche des Dreiecks verglichen werden, oder genauer gesagt, durch diese Fläche ausgedrückt werden.

3. Es sei $\mathrm{Log} : \mathbb{C}^\bullet \to \mathbb{C}$ der Hauptzweig des Logarithmus. Man bestimme

$$\int_\alpha \mathrm{Log}(z)\ dz$$

wobei α den grössten Teil des Einheitskreises im Uhrzeigersinn durchläuft, und zwar von $e^{\pi i - \varepsilon i}$ bis nach $e^{-\pi i + \varepsilon i}$ für ein kleines positives ε. Was ist der Grenzwert, wenn ε gegen Null strebt?

4. Sei $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup \cdots \cup D_n$ wobei $D_1, \ldots, D_n$ offene Teilmengen von $\mathbb{C}$ sind. Es soll angenommen werden, dass $D_k \cap D_\ell$ *zusammenhängend* ist für alle $k, \ell \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ mit $k < \ell$. (Siehe z.B. Freitag-Busam I.5.5. Hier ist die entscheidende Konsequenz davon, dass jede analytische Funktion, die in $D_k \cap D_\ell$ definiert ist und Ableitung $\equiv 0$ hat, konstant ist.) Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion, die in jedem D_k eine Stammfunktion F_k besitzt $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Für $k, \ell \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ mit $k < \ell$ sei $A_{k,\ell} \in \mathbb{C}$ der konstante Wert von $F_\ell - F_k$ in $D_k \cap D_\ell$. Man zeige: für jede glatte Kurve $\gamma : [a, b] \to D$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ ist das Kurvenintegral

$$\int_\gamma f(z)\ dz$$

eine Linearkombination mit ganzzahligen Koeffizienten der Zahlen $A_{k,\ell}$. (Also beispielsweise so etwas wie $5 \cdot A_{2,4} - 3 \cdot A_{3,7} + A_{4,5}$.)

Punkte: 2+3+4, 3+5+9, 10, 14.