26.10.2012

Übungsblatt 4 zu Funktionentheorie
WS 2012/13 (Weiss)

1. Zeigen Sie, dass sich jede reelle 2×2-Matrix M der Form

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

schreiben lässt als Produkt

$$\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} .$$

Also ist die lineare Abbildung, die durch M vermittelt wird, Hintereinanderausführung einer Streckung um den Faktor r und einer Drehung um den Winkel θ. Sind r und θ eindeutig bestimmt durch M ?

2. (a) Sei $f(z) = \cos(z)$ für $z \in \mathbb{C}$. Schreiben Sie f in der Form

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

mit geeigneten Abbildungen $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Bestimmen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen von u und v und zeigen Sie damit direkt, dass die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} , \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

gelten, sowie die Laplace-Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 , \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 .$$

(b) Sei $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $g(x+iy) = (x^2y + xy^2) + (x-y)i$. An welchen Stellen in $\mathbb{C}$ ist g komplex ableitbar?

(c) Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Menge, $f : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, die harmonisch ist, also

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv 0$$

in U. Gegeben sei irgendeine Orthonormalbasis v, w von $\mathbb{R}^2$ (das heisst, v und w sind Einheitsvektoren, die zueinander senkrecht sind). Zeigen Sie, dass dann auch

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} \equiv 0 .$$

(Die Schreibweise mag unklar sein; Sie können zum Beispiel $\partial^2 f/\partial v^2$ als die zweite Ableitung von f in der Richtung des Einheitsvektors v verstehen.)

3. Sei $P(x,y)$ ein homogenes Polynom vom Grad m mit reellen Koeffizenten, also $u(x,y) = a_0x^m + a_1x^{m-1}y + a_2x^{m-2}y^2 + \cdots + a_{m-1}xy^{m-1} + a_my^m$, wobei $a_0, \ldots, a_m$ festgewählte reelle Zahlen sind. Beweisen Sie oder wiederlegen Sie die folgende Behauptung: *Wenn die durch $P(x,y)$ definierte Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ harmonisch ist, dann existiert ein $w \in \mathbb{C}$ derart, dass $P(x,y)$ der Realteil von $w \cdot (x+iy)^m$ ist für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.*

4. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Menge, $f : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, die harmonisch ist. Wir wählen ein festes $(x_0, y_0) \in U$ und nehmen an, dass die Kreisscheibe vom Radius ε um (x_0, y_0) ganz in U liegt. Für $r \in \mathbb{R}$ mit $0 < r \leq \varepsilon$ sei

$$g(r) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f(x_0 + r\cos\psi, y_0 + r\sin\psi)\ d\psi\ .$$

Im Integranden durchlaufen die Punkte $(x_0 + r\cos\psi, y_0 + r\sin\psi)$ eine Kreislinie vom Radius r um den Punkt (x_0, y_0), während ψ das Intervall $[0, 2\pi]$ durchläuft. Der Faktor $(2\pi)^{-1}$ vor dem Integral soll die Länge des Integrationsintervalls $[0, 2\pi]$ ausgleichen. Damit können wir uns $g(r)$ als den *Durchschnittswert* von f auf dieser Kreislinie vorstellen.
Sei $A(r,\psi) = f(x_0 + r\cos\psi, y_0 + r\sin\psi)$. Das ist also der Integrand in der Definition von $g(r)$. Zeigen Sie

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + r^{-2}\frac{\partial^2 A}{\partial \psi^2} + r^{-1}\frac{\partial^1 A}{\partial r} \equiv 0\ .$$

Schliessen Sie daraus

$$g'(r) + r \cdot g''(r) \equiv 0.$$

Das ist eine Differentialgleichung für die Funktion g' definiert auf dem Intervall $]0, \varepsilon[$. Sie dürfen benutzen, dass diese Differentialgleichung nur die Lösungen $g'(r) = a/r$ hat, wobei $a \in \mathbb{R}$ fest ist. Demnach ist $g(r) = a\ln(r) + b$ für ein $b \in \mathbb{R}$. Schliessen Sie daraus, dass g eine konstante Funktion ist, nämlich $g(r) = f(x_0, y_0)$ für alle $r \in]0, \varepsilon[$.
[*Deutung: der Durchschnittswert von f auf jeder Kreisline vom Radius $\leq \varepsilon$ um (x_0, y_0) ist gleich $f(x_0, y_0)$.*]

Punkte: 5, 5+5+5, 15, 15.