26.10.2012

Üb 3 zu Funkt, Musterlösungen WS 2012/13 (Weiss)

1. (a) Hier handelt es sich einfach um $\cos(i)$, wie man durch Einsetzen bestätigt. Ausserdem ist

$$\cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$$

so dass $\cos(i) = (\exp(-1) + \exp(1))/2 = e + e^{-1}$.

(b) Sei

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k)!}, \qquad B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)!}, \qquad C = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+2)!}$$

und sei $z = \exp(2\pi i/3) = (-1 + i\sqrt{3})/2$, eine dritte Wurzel von 1. Dann findet man

$$\begin{aligned} A + B + C &= \exp(1) \\ A + Bz + Cz^2 &= \exp(z) \\ A + Bz^2 + Cz^4 &= \exp(z^2) \end{aligned}$$

also ein lineares Gleichungssystem mit drei Unbekannten A, B, C. (Die rechten Seiten können als bekannt betrachtet werden.) Die Matrix des Gleichungssystems ist eine (ganz spezielle) VanderMonde Matrix!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & z^2 \\ 1 & z^2 & z^4 \end{bmatrix}$$

Nach der allgemeinen Formel für Vandermonde-Determinanten ist ihre Determinante also

$$(z-1)(z^2-1)(z^2-z) = z^5 - 2z^4 + 2z^2 - z = 3z^2 - 3z\ .$$

Demnach ist

$$A = \frac{\det \begin{bmatrix} \exp(1) & 1 & 1 \\ \exp(z) & z & z^2 \\ \exp(z^2) & z^2 & z^4 \end{bmatrix}}{3z^2 - 3z} = \frac{\exp(1) + \exp(z) + \exp(z^2)}{3}.$$

Bei der letzten Vereinfachung kann man auch benutzen, dass die Unterdeterminanten, die bei der Entwicklung der Determinante von

$$\begin{bmatrix} \exp(1) & 1 & 1 \\ \exp(z) & z & z^2 \\ \exp(z^2) & z^2 & z^4 \end{bmatrix}$$

nach der ersten Spalte entstehen, wieder VanderMonde-Determinanten sind. Die ganze Methode lässt sich gut verallgemeinern (für den Fall, dass Sie zum Beipiel $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(25k)!}$ berechnen wollen).

2. Sei $a = \exp(iz)$. Dann ist $\cos(z) = (a + a^{-1})/2$, und das ist reell genau dann, wenn $a + a^{-1}$ reell ist. Wenn a selbst reell ist, dann ist natürlich auch $a + a^{-1}$ reell. Wenn a nicht reell ist, aber $|a| = 1$, dann ist $a^{-1} = \bar{a}$ und daher auch $a + a^{-1}$ reell. Wenn a nicht reell ist und $|a| \neq 1$, dann geht es schief. Also: $\cos(z)$ ist reell genau dann, wenn a reell ist oder $|a| = 1$. Erster Fall: a reell bedeutet $iz =$ (reelle Zahl$+k\pi i$) für ein $k \in \mathbb{Z}$. Gleichwertig dazu: $\operatorname{Re} z = k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Zweiter Fall: $|a| = 1$ bedeutet $\operatorname{Re} iz = 0$ und das heisst, dass z reell ist. Fertig. Die Lösungsmenge (als Teilmenge der Gauss-Argand Ebene) ist die Vereinigung der reellen Achse mit den vertikalen Geraden, die durch $\operatorname{Re} z = k\pi$ für festes $k \in \mathbb{Z}$ definiert sind.

3. (a) Man kann $p = 1$ und $M_n =]0, 2^{-n}[$ nehmen.
(b) Angenommen, der Durchschnitt ist leer. Sei $U_n = \mathbb{R}^p \smallsetminus M_n$. Das ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^p$. Nach Voraussetzung ist die kompakte Menge M_0 in $\bigcup_{n\geq 0} U_n$ enthalten. Wegen Kompaktheit muss M_0 dann schon in einer Vereinigung von endlichen vielen der U_n enthalten sein. Unter diesen endlich vielen gibt es aber ein grösstes, etwa U_{n_0}, so dass dieses U_{n_0} allein schon M_0 enthalten muss. Da $M_{n_0} \subset M_0$ und $M_{n_0} \cap U_{n_0} = \emptyset$, folgt daraus $M_{n_0} = \emptyset$. Widerspruch zu Voraussetzung.

4. (a) Sei $w \in \mathbb{R}^p$ ein Häufungspunkt von A, der nicht Element von A ist. Die Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(z) = |z - w|^{-1}$ ist stetig. Nach Vorraussetzung gibt es eine Folge von $z_n \in A$, die gegen w konvergiert; dann strebt $|z_n - w|$ gegen Null für $n \to \infty$, also haben die Zahlen $f(z_n)$ keine gemeinsame obere Schranke.
(b) Wir wählen w wie in (a). Setze zum Beispiel

$$g(z) = w + \frac{1}{|z - w|^2}(z - w) \ .$$

Dies Formel definiert eigentlich eine stetige bijektive Abbildung von $\mathbb{R}^p \smallsetminus \{w\}$ nach $\mathbb{R}^p \smallsetminus \{w\}$: die inverse Abbildung ist durch die selbe Formel gegeben! Wir schränken sie hier auf A ein.