19.10.2012

Übungsblatt 3 zu Funktionentheorie
WS 2012/13 (Weiss)

1. (a) Man bestimme die Summe der Reihe

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{8!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} .$$

(b) Man bestimme die Summe der Reihe

$$1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{9!} + \frac{1}{12!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k)!} .$$

Hinweis zu (b)*:* Experimentieren mit $\exp(z)$, wobei z eine dritte Wurzel von 1 ist, aber $z \neq 1$.

2. Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist $\cos(z)$ eine reelle Zahl?

3. (a) Man gebe ein Beispiel einer (unendlichen) Folge von beschränkten, nicht leeren Teilmengen $M_0, M_1, M_2, \ldots$ von $\mathbb{R}^p$ derart, dass

$$M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots$$

und $\bigcap_{n\geq 0} M_n = \emptyset$.
(b) Es sei $M_0, M_1, M_2, \ldots$ eine (unendliche) Folge von *abgeschlossenen* beschränkten nicht leeren Teilmengen des $\mathbb{R}^p$ derart, dass

$$M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots .$$

Man zeige, dass $\bigcap_{n\geq 0} M_n \neq \emptyset$.

4. Sei A eine *nicht* abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^p$.
(a) Man zeige, dass eine stetige Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ existiert derart, dass die Menge $f(A)$ keine obere Schranke besitzt.
(b) Man zeige, dass es eine injektive stetige Abbildung $g : A \to \mathbb{R}^p$ gibt derart, dass $g(A)$ keine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^p$ ist.

Zur Abgabe: Alles. Punkte: 5+15, 5, 5+5, 5+10.