12.10.2012

Übungsblatt 2 zu Funktionentheorie
WS 2012/13 (Weiss)

1. Sei $P(z)$ ein nicht-konstantes Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$. Man zeige, dass die Funktion $z \mapsto |P(z)|$ von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{R}$ ein (globales) Minimum hat. [Ausserdem wurde in der Vorlesung bewiesen, dass die Funktion $z \mapsto |P(z)|$ nur dann ein lokales Minimum bei $z_0 \in \mathbb{C}$ haben kann, wenn $P(z_0) = 0$ ist. Beide Aussagen zusammengenommen ergeben also den Fundamentalsatz der Algebra: jedes nichtkonstante Polynom $P(z)$ mit komplexen Koeffizienten hat eine Nullstelle.]

2. Das Polynom $z^4 - 3z^3 + 2z^2 + z + 5$ soll in Linearfaktoren zerlegt werden. (Das ist fast dasselbe, wie das Auffinden aller Nullstellen.) Hinweis dazu: $z = 2 + i$ ist eine Nullstelle.

3. Man bestimme alle Lösungen z (in $\mathbb{C}$) der Gleichung $\cos z = 2$. Realteil und Imaginärteil so klar wie möglich beschreiben.
(Ähnliche Aufgaben gibt es auch bei Freitag-Busam, und da gibt es auch einen Hinweis dazu, aber der Hinweis ist nicht ganz leicht zu verstehen! Also nicht einfach ohne weitere Erklärungen abschreiben.)

4. Hat die Gleichung $\cos z = w$ für jedes feste $w \in \mathbb{C}$ eine Lösung z ? (Es wird also gefragt, ob die Funktion cos von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ surjektiv ist.)

5. Jeder komplexen Zahl $z = a + bi$ soll die reelle 2×2-Matrix

$$M(z) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

zugeordnet werden. Man zeige, dass $M(wz) = M(w) \cdot M(z)$ und $M(w+z) = M(w) + M(z)$ ist für alle $z, w \in \mathbb{C}$. Ausserdem ist $M(1) = I_2$ und $M(0)$ ist die 0-Matrix. Demnach ist $z \mapsto M(z)$ ein Ringhomomorphismus von $\mathbb{C}$ in den Ring der reellen 2×2-Matrizen. Er ist offensichtlich injektiv.
Man zeige, dass sich jede reelle 2×2-Matrix eindeutig in der Form

$$M(w) + M(z) \cdot H$$

schreiben lässt mit geeigneten $w, z \in \mathbb{C}$, wobei

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Man zeige ausserdem, dass $M(z) \cdot H = H \cdot M(\bar{z})$, und natürlich $H \cdot H = I_2$. Damit sind die Rechenregeln im Ring der 2×2-Matrizen auf die Rechenregeln in $\mathbb{C}$ (einschliesslich Begriff Konjugation) zurückgeführt.

Zur Abgabe: 1,2,3,5. Punkte: 10, 10, 15, 15.