21.01.2013

Übungsblatt 13 zu Funktionentheorie
WS 2012/13 (Weiss)

Keine Abgabe von Lösungen.

1. Bestimmen Sie $\mathrm{Res}(f;1)$ in dem Fall, wo $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2 z}$.

2. Berechnen Sie (mit Residuensatz)

$$\int_\alpha \frac{1}{1-z^7}\,dz$$

wobei die geschlossene stückweise glatte Kurve α wie folgt definiert ist: Gerades Linienstück von $2i$ bis $-2i$, dann Halbkreis vom Radius 2 im mathematisch positiven Sinn durchlaufen von $-2i$ bis $2i$.

3. Gegeben endlich viele verschiedene Elemente $z_1, \ldots, z_k$ von $\mathbb{C}$ und eine analytische Funktion $f : \mathbb{C} \smallsetminus \{z_1, \ldots, z_k\}$, die die Eigenschaft hat

$$\lim_{|z|\to\infty} |z \cdot f(z)| \;=\; 0\ .$$

(Das soll heissen: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $R > 0$ so dass $|z \cdot f(z)| < \varepsilon$ für all $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{z_1, \ldots, z_k\}$, die $|z| > R$ erfüllen.)
Zeigen Sie, dass

$$\sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}(f, z_j) = 0\ .$$

Explizit durchrechnen im Falle von $f(z) = 1/(1-z^3)$. Wo sind die Pole? Was sind die einzelnen Residuen?

4. Bestimmen Sie die isolierten Singularitäten der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{\sin(z^{-1})}\ .$$

(Die Stelle $z = 0$ ist keine *isolierte* Singularität von diesem f.) Bestimmen Sie dann $\mathrm{Res}(f; w)$ für jede dieser isolierten Singularitäten w.

5. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch, $\alpha : [c,d] \to D$ eine stückweise glatte *geschlossene* Kurve mir der Eigenschaft, dass $f(\alpha(t)) \neq 0$ für alle $t \in [c,d]$. Dann ist die Zahl

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

eine ganze Zahl. [Wurde in der Vorlesung am Montag 21.01. erwähnt, aber ich vermute, dass ich den Faktor $1/2\pi i$ mal wieder vergessen habe. Es ist auch in III.7.5 von Freitag-Busam erwähnt, aber nicht sehr gründlich erklärt.]