11.01.2013

Übungsblatt 12 zu Funktionentheorie WS 2012/13 (Weiss)

1. Man bestimme die Laurententwicklung der Funktion

$$g(z) = \frac{1}{1-z}$$

für das Gebiet $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z|\}$, und zwar auf zweierlei Weise:

(a) Inspiriertes Benutzen von Formel für geometrische Reihe (wie leider in Freitag-Busam vorgeführt);

(b) Durch Anwenden der Integralformeln für die Laurentkoeffizienten (wie z.B. in III.5.2 Zusatz von Freitag-Busam).

Zu beachten: hier ist $r = 1$ und $R = \infty$ in der Schreibweise, die ich benutzt habe, wo es um Laurententwicklungen ging.

2. Sei $g(z) = \exp(z + z^{-1})$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Bestimmen Sie die Laurententwicklung von g für das Gebiet $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Entscheiden Sie auch, welcher Typ von isolierter Singularität an der Stelle 0 vorliegt.
Zu beachten: hier ist $r = 0$ und $R = \infty$.

3. Sei γ eine glatte oder stückweise glatte geschlossene Kurve in $\mathbb{C}$, die den Nullpunkt nicht trifft. Die *Umlaufzahl* $\chi(\gamma; 0)$ von γ um den Nullpunkt kann definiert werden als

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma z^{-1} \, dz \ .$$

Zeigen Sie, dass $\chi(\gamma; 0) \in \mathbb{Z}$. Dabei darf Aufgabe 4 von Übungsblatt 5 benutzt werden, mit $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $f(z) = z^{-1}$.

4. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion (also ganze Funktion). Man zeige: wenn

$$\lim_{|z| \to \infty} |f(z)| = \infty$$

dann ist f ein Polynom.
Anleitung. Potenzreihenentwicklung von f mit Entwicklungspunkt 0 hinschreiben, dann darauf aufbauend Laurent-Entwicklung von $z \mapsto f(1/z)$ mit Entwicklungspunkt 0 hinschreiben. Was für einen Singularitätentyp hat $z \mapsto f(1/z)$ an der Stelle 0? Casorati-Weierstrass bedenken.

Punkte: 5+7, 13, 12, 13.