21.12.2012

Übungsblatt 11 zu Funktionentheorie WS 2012/13 (Weiss)

1. Sei $\varepsilon > 0$ fest gewählt. Die Funktion sin ist im Gebiet

$$D_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} \mid -\varepsilon < \operatorname{Im} z < \varepsilon\}$$

beschränkt. [Beweisen.] Was ist das Supremum von $|\sin(z)|$ für $z \in D_\varepsilon$? [Antwort in Abhängigkeit von ε ausdrücken.]

2. Sei $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} \bigm| |z| < 1\}$. Wir haben gesehen (Folgerung aus dem Schwarz'schen Lemma), dass jede bijektive analytische Abbildung $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ mit analytischem $f^{-1} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ die Form

$$f(z) = b \cdot \frac{z-a}{\bar{a}z - 1}$$

hat für feste Zahlen $a, b \in \mathbb{C}$ mit $|a| < 1$ und $|b| = 1$, die natürlich von f abhängen. Um diese Abhängigkeit von f auszudrücken, schreiben wir a_f und b_f statt a und b. Die Abbildungen f mit dieser Eigenschaft bilden eine Gruppe Γ, mit Zusammensetzung "$\circ$" als Gruppenoperation.

(i) Wie hängen a_f und b_f von f ab?

(ii) Sei $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ ein Element von Γ und $g : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ das dazu inverse Element. Wie kann man a_g und b_g aus a_f und b_f bestimmen?

(iii) Wenn $f, g : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ Elemente von Γ sind, wie kann man dann $a_{f\circ g}$ und $b_{f\circ g}$ aus a_f , a_g , b_f und b_g bestimmen?

3. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die Ordnung im Punkt 0. Wann liegt eine hebbare Singularität vor? Wann liegt ein Pol vor (ausserwesentliche Singularität, nicht hebbar) und was ist dann die Polordnung?

i) $\dfrac{\exp(z)-1}{z^7}$ ii) $\dfrac{z}{\exp(z)-1}$ iii) $z^n \sin z,\ n \in \mathbb{Z}$ iv) $z^n \exp(z),\ n \in \mathbb{Z}$

4. (Aus Freitag-Busam, Bem 4.6.) Sei a eine ausserwesentliche Singularität der analytischen Funktionen $f, g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ wobei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Zeigen Sie: Dann ist a auch eine ausserwesentliche Singularität der Funktionen,

$$f \pm g\ , \quad f \cdot g, \quad f/g \quad \text{falls } g(z) \neq 0 \text{ für alle } z \in D \setminus \{a\}$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}(f \pm g; a) &\geq \min\{\operatorname{ord}(f;a), \operatorname{ord}(g;a)\} \\ \operatorname{ord}(f \cdot g; a) &= \operatorname{ord}(f;a) + \operatorname{ord}(g;a), \\ \operatorname{ord}(f/g; a) &= \operatorname{ord}(f;a) - \operatorname{ord}(g;a)\ . \end{aligned}$$

(Vereinbarung dazu: Man schreibt $\mathrm{ord}(f; a) = +\infty$, falls f in einer Umgebung von a gleich Null ist. Dazu einige Rechenregeln für das Rechnen mit $+\infty$, die man sich ohnehin denken kann.)

Punkte: 12, 20, 2+2+2+2, 10