14.12.2012

Übungsblatt 10 zu Funktionentheorie WS 2012/13 (Weiss)

1. (a) Der Konvergenzradius R einer Potenzreihe $c_0 + c_1z + c_2z^2 + c_3z^3 + \cdots$ (wobei $c_n \in \mathbb{C}$ für $n = 0, 1, 2, , \ldots$) wurde auf zweierlei Weise definiert:

$$R = \sup\{\rho \in [0, \infty] \;\big|\; \text{die Folge } (c_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist beschränkt}\},$$

$$R = \sup\{\rho \in [0, \infty] \;\big|\; \text{die Folge } (c_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert gegen } 0\}.$$

Zeigen Sie, dass diese beiden Definitionen äquivalent sind.

(b) Sei $c_0 + c_1z + c_2z^2 + c_3z^3 + \cdots$ eine Potenzreihe ($c_k \in \mathbb{C}$ für $k \in \mathbb{N}$). Der Konvergenzradius sei $R \in [0, \infty]$. Zeigen Sie, dass die "integrierte" Potenzreihe $c_0z + c_1z^2/2 + c_2z^3/3 + c_3z^4/4 + \cdots$ denselben Konvergenzradius R hat.

2. (a) Die Potenzreihe von $\mathrm{Log}(1 + z)$ mit Entwicklungspunkt 0 hat den Konvergenzradius 1. (Warum?) Man zeige, dass sie für $z = i$ konvergiert. Sie erhalten damit interessante Reihenausdrücke für $\pi/4$ und $\ln(\sqrt{2})$. Wie geht das?

(b) Eine Stammfunktion soll angegeben werden (in einem geeigneten Gebiet, das 0 enthält) für

$$z \quad \mapsto \quad (1 + z + z^2)^{-1} = \frac{1 - z}{1 - z^3}\ ,$$

einmal als Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0 und dann auch mit normalen Integrationsmethoden. Was ist der Konvergenzradius der Potenzreihe? Wie berechnen Sie demnach

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \cdots$$

3. *Korrektur 19.12.: Diese Aufgabenstellung war entsetzlich falsch! Geben Sie stattdessen ein Gegenbeispiel. Zu jedem noch so grossen $M \in \mathbb{R}$ existiert eine ganze Funktion f derart, dass $|f(z)| \le 1$ ist für alle z mit $|z| = 1$, und trotzdem $|f(2)| > M$.*

Sei f eine ganze Funktion. Zeigen Sie: wenn $|f(z)| \le 1$ für alle z vom Betrag 1, dann ist $|f(z)| \le e^{|z|}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

[Hinweis: Potenzreihenentwicklung von f im Punkt 0 anschauen. Was ist der Konvergenzradius? Was kann man über die Koeffizienten sagen?]

4. (a) (*Zusätzliche Voraussetzung, hinzugefügt 19.12.*) Sei D ein Gebiet, das nichtleeren Durchschnitt mit der reellen Achse hat. Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion. Wenn $f(z)$ reell ist für jedes $z \in D \cap \mathbb{R}$, dann gilt für jedes $z \in D$ mit $\bar{z} \in D$, dass

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)} \ .$$

Zusätzliche Voraussetzung: $\{z \in D \mid \bar{z} \in D\}$ ist wegzusammenhängend.

(b) (*Vorsicht, schwierig.*) Sei D ein Gebiet, das die Scheibe $\{z \in \mathbb{C} \bigm| |z| \leq 1\}$ enthält. Sei $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch und $f(z) \in \mathbb{R}$ für alle z vom Betrag 1. Man zeige, dass f konstant ist. [Hinweis: Zeigen, dass $z \mapsto f(\exp(iz))$ konstant ist, wo es definiert ist.]

Punkte: 5+5, 5+10, 10, 5+10.