

## Probeklausur zu Funktionentheorie WS 2012/13 (Weiss)

**Aufgabe 1.** (a) Sei  $z = 3 + 4i$  und  $w = 2 - 5i$ . Man bestimme  $zw$  und  $z/w$ . 2 Punkte

(b) Formel angeben für Realteil und Imaginärteil von  $z^{-1}$ , wobei  $z = x + iy$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $z \neq 0$ . 3 Punkte

(c) So weit wie möglich vereinfachen:  $(1 - \sqrt{3}i)^{98}$ . 4 Punkte

(d) Alle fünften Wurzeln von  $-i$  in  $\mathbb{C}$  bestimmen. 6 Punkte

**Aufgabe 2.** (a) Gegeben ein Intervall  $[a, b]$  in  $\mathbb{R}$ , eine Teilmenge  $D$  von  $\mathbb{C}$ , eine glatte (d.h. stetig differenzierbare) Kurve  $\alpha : [a, b] \rightarrow D$  und eine stetige Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ . Wie ist das Kurvenintegral  $\int_{\alpha} f(z) dz$  definiert? 3 Punkte

(b) Unter Voraussetzungen wie in Aufgabe 2(a) soll die Abschätzung

$$\left| \int_{\alpha} f(z) dz \right| \leq \ell(\alpha) \cdot C$$

bewiesen werden, wobei  $C$  das Maximum der Funktionswerte von  $|f \circ \alpha|$  ist und  $\ell(\alpha)$  die *Bogenlänge* der Kurve  $\alpha$ . Dabei soll auch definiert werden, was  $\ell(\alpha)$  genau ist. 6 Punkte

(c) Sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  an der Stelle  $a \in D$  komplex differenzierbar. Man zeige, dass

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{|z-a|=\varepsilon} f(z) dz}{\varepsilon^2} = 0$$

wobei das Integral ein Kurvenintegral über den Kreis vom Radius  $\varepsilon$  um  $a$  ist, im mathematisch positiven Sinn genommen. 11 Punkte

**Aufgabe 3.** (a) Eine Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist definiert durch  $f(x + iy) = xy + (x + y)i$  für  $x, y \in \mathbb{R}$ . An welchen Stellen von  $\mathbb{C}$  ist sie komplex differenzierbar? 5 Punkte

(b) Was besagt die (erste) Integralformel von Cauchy? Bitte die Voraussetzungen klar formulieren. 5 Punkte

(c) Man bestimme alle  $a \in \mathbb{C}$  so, dass

$$\int_{|z|=2} \frac{\exp z}{z - a} dz = \pi i$$

wird. (Das Kurvenintegral soll im mathematisch positiven Sinn über den Kreis vom Radius 2 um 0 genommen werden.) 5 Punkte