Aufgabe 1. *Rechnerische und geometrische Grundlagen.*
(a) Seien $c = a + bi$ und $z = x + iy$ zwei komplexe Zahlen mit $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ und $z \neq 0$. Geben Sie Formeln an für den Realteil und den Imaginärteil von c/z. (3 *Punkte*)

(b) Definieren Sie die Begriffe *Betrag* und *Argument* einer komplexen Zahl $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$ beliebig). Schreiben Sie z in der *Polarform* hin. Bestimmen Sie im Fall von $z = -1 + \sqrt{3}\,i$ die Potenz z^{57} (Angabe von Realteil und Imaginärteil) sowie alle 5ten Wurzeln von z (Angabe der Real- und Imaginärteile). (7 *Punkte*)

(c) Definieren Sie $\operatorname{Arg}(z)$, den Hauptwert des Arguments einer komplexen Zahl z. Was ist der Definitionsbereich der Funktion Arg ? Ist sie überall stetig? Wenn nein, wo ist sie es nicht? (3 *Punkte*)

(d) Definieren Sie die Begriffe *Gebiet* in $\mathbb{C}$ und *Sterngebiet* in $\mathbb{C}$. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ sind Gebiete und welche sind Sterngebiete ? (Beweise hier nicht erforderlich.)

i) $\mathbb{R}$
ii) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq 0\}$
iii) $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$
iv) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$
v) $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

Beweisen Sie oder widerlegen Sie (in Form eines Gegenbeispiels) die Aussage: Der Durchschnitt von zwei Gebieten ist ein Gebiet. (7 *Punkte*)

(e) Gegeben Sterngebiete $D_1, D_2, ..., D_n$ mit der Eigenschaft, dass die Vereinigung der D_i gleich $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist, d.h.

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} = \bigcup_{i=1}^{n} D_i.$$

Was ist der kleinstmögliche Wert für n? Es sei weiterhin angenommen, daß für alle k, l die Durchschnitte $D_k \cap D_\ell$ Gebiete sind. Was ist der kleinstmögliche Wert für n in diesem Fall? (5 *Punkte*)

Aufgabe 2. *Komplexe Differenzierbarkeit.*
(a) Sei D eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ und $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Was bedeutet die Aussage *f ist komplex differenzierbar an der Stelle $a \in \mathbb{C}$* ? (3 *Punkte*)

(b) Die *Cauchy-Riemann Differentialgleichungen* drücken eine notwendige und hinreichende Bedingung aus für die komplexe Differenzierbarkeit einer total differenzierbaren Funktion $f : D \to \mathbb{C}$. Wie lauten diese Differentialgleichungen? Geben Sie ein Beispiel einer total differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an, die die Cauchy-Riemann DGL nicht erfüllt. (5 *Punkte*)

(c) Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion, die die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen erfüllt und zweimal stetig differenzierbar ist im Sinn der partiellen Ableitungen. Zeigen Sie, dass der Realteil $\mathrm{Re}\, f$ (aufgefaßt als Funktion von $D \subset \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$) die Laplace'sche Differentialgleichung

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})\,\mathrm{Re}\, f = 0$$

erfüllt. (7 *Punkte*)

Aufgabe 3. *Kurvenintegrale.*
(a) Gegeben ein Intervall $[a, b]$ in $\mathbb{R}$, eine Teilmenge D von $\mathbb{C}$, eine glatte (d.h. stetig differenzierbare) Kurve $\alpha : [a, b] \to D$ und eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{C}$. Definieren Sie das Kurvenintegral

$$\int_\alpha f(z)dz.$$

Sei zusätzlich angenommen, dass D offen in $\mathbb{C}$ ist und α ist *geschlossen*, d.h. $\alpha(a) = \alpha(b)$. Zeigen Sie, dass

$$\int_\alpha f(z)dz = 0$$

wenn f eine Stammfunktion F besitzt. (7 *Punkte*)

(b) Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ stetig und $\alpha : [c, d] \to D$ eine glatte Kurve. Beweisen Sie die Abschätzung

$$\Big| \int_\alpha f(z)\ dz \Big| \leq \ell(\alpha) \cdot C$$

wobei C das Maximum der Funktionswerte von $|f \circ \alpha|$ ist und $\ell(\alpha)$ die *Bogenlänge* der Kurve α. Definieren Sie hierbei auch den Begriff der *Bogenlänge.* (9 *Punkte*)

(c) Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ eine *stetige* Funktion. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

(i) Für jede stückweise glatte *geschlossene* Kurve $\alpha : [a, b] \to D$ ist das Integral $\int_\alpha f(z)\ dz$ gleich 0.
(ii) Für jede stückweise glatte Kurve $\alpha : [a, b] \to D$ hängt das Integral $\int_\alpha f(z)\ dz$ nur von dem Anfangs- und Endpunkt $\alpha(a)$ und $\alpha(b)$ ab.
(iii) f besitzt eine Stammfunktion F, also $F : D \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar mit $F' = f$.

Skizzieren Sie (i)$\Rightarrow$(ii) und (ii)$\Rightarrow$(iii). (14 *Punkte*)

Aufgabe 4. *Integralformeln und Potenzreihenentwicklungen.*
(a) Was besagt die (erste) Integralformel von Cauchy? Bitte die Voraussetzungen klar formulieren. Benutzen Sie die Formel, um das Kurvenintegral

$$\int_{|z|=4} \frac{\exp(z)}{z-\pi i}\, dz$$

zu bestimmen. (5 *Punkte*)

(b) Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ eine Potenzreihe mit $b_n \in \mathbb{C}$ für alle $n \geq 0$. Definieren Sie den *Konvergenzradius* dieser Reihe. Was sagt der Konvergenzradius über die Konvergenz der Reihe für ein festes z aus? (5 *Punkte*)

(c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

$$\text{(i)} \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n \qquad \text{(ii)} \sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^n .$$

(5 *Punkte*)

(d) Sei D ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion. Skizzieren Sie, wie aus der Cauchy-Integralformel die Entwickelbarkeit von f in eine Potenzreihe an einem beliebigen Punkt $b \in D$ folgt. [Wenn Sie bei der Herleitung gute Eigenschaften von Funktionenreihen benutzen, sollen diese benannt werden.] Wie läßt sich der Konvergenzradius in diesem Fall abschätzen?
(10 *Punkte*)

(e) Geben Sie die Potenzreihenentwicklung der Funktion $z \mapsto 1/(z-i)$ an der Stelle 0 an und bestimmen Sie ihren Konvergenzradius. (5 *Punkte*)

Aufgabe 5. *Singularitäten und Laurententwicklung.*
(a) Definieren Sie den Begriff *isolierte Singularität* einer analytischen Funktion. Definieren sie die Begriffe *hebbare Singularität*, *außerwesentliche Singularität* und *wesentliche Singularität*. Definieren Sie weiterhin den Begriff der *Ordnung* $\operatorname{ord}(f;a)$ für den Fall, dass f an der Stelle a eine außerwesentliche Singularität hat. (5 *Punkte*)

(b) Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen den Singularitätentyp an der Stelle 0, sowie die Ordnung $\operatorname{ord}(f;0)$, falls diese definiert ist:

$$\text{(i)} \frac{\cos(z)-1}{z^2} \qquad \text{(ii)} \exp(z+z^{-1}) \qquad \text{(iii)} \frac{(\cos(z)-1)^2}{z^5}$$

(9 *Punkte*)

(c) Sei D ein Gebiet der Form $D = \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, r < |z-a| < R\}$ wobei $a \in \mathbb{C}$ fest ist und $r, R \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $0 \leq r < R \leq \infty$. Sei $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch. Was ist die *Laurententwicklung* von f im Gebiet D ?

Wenn $r = 0$, dann hat f an der Stelle a eine isolierte Singularität. Wie lassen sich die unter (a) genannten Typen von isolierten Singularitäten durch die Laurententwicklung charakterisieren? (8 *Punkte*)

(d) Was besagt der Satz von Casorati-Weierstraß über wesentliche Singularitäten? Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion, die

$$\lim_{|z|\to\infty} f(z) = \infty$$

erfüllt. Angenommen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n$$

ist die Laurententwicklung von f in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass es nur endlich viele $n \geq 0$ gibt mit $b_n \neq 0$. (8 *Punkte*)

Aufgabe 6. *Residuensatz und andere wichtige Sätze.*
(a) Sei D offen in $\mathbb{C}$, $w \in D$ und $f : D \setminus \{w\} \to \mathbb{C}$ analytisch. Definieren Sie $\mathrm{Res}(f;w)$, das *Residuum von* f *an der Stelle* w. Zeigen Sie, dass die folgende Beziehung gilt, wenn f einen einfachen Pol bei w hat:

$$\mathrm{Res}(f;w) = \lim_{z\to w}(z-w)f(z).$$

(5 *Punkte*)

(b) Was besagt der Residuensatz? Illustrieren Sie den Satz durch Bestimmung des Kurvenintegrals

$$\int_{|z-\pi|=4} \frac{1}{\sin(z)}\, dz.$$

[Die Kurve ist ein Kreis vom Radius 4 um den Punkt $\pi \in \mathbb{C}$ und wird im mathematisch positiven Sinn durchlaufen.] (12 *Punkte*)

(c) Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, das die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ enthält und $f : D \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion, mit der Eigenschaft, dass für alle z vom Betrag 1 die Ungleichung

$$|f(z)| \leq |\exp(z)|$$

gilt. Zeigen Sie, dass diese Ungleichung für *alle* z mit $|z| \leq 1$ efüllt ist. (8 *Punkte*)

(d) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion, die für alle reellen z die Gleichung

$$f(z+1) = f(z)$$

erfüllt. Zeigen Sie, dass diese Gleichung für *alle* $z \in \mathbb{C}$ erfüllt ist. (5 *Punkte*)