Siebte Vorlesungswoche (ungefähr)

Übersicht zu Differentialtopologie WS 2012/13 (Weiss)

Das Lemma von Morse-Palais wurde von mir vorgetragen streng nach der Darstellung im Buch von Serge Lang, *Differential Manifolds*. Der elegante Beweis stammt von Palais, der Satz als solcher von Morse. Es geht darum, für eine Morsefunktion $f : M \to \mathbb{R}$ gute lokale Koordinaten an den kritischen Punkten von f einzuführen. *Gut* heisst, dass f in diesen lokalen Koordinaten wie eine quadratische Form aussieht.

Es gab dann noch ein paar Bemerkungen zu Transversalität ohne Kompaktheitsvoraussetzungen. Hier ist ein Beispiel. Gegeben sei $f\colon M \to N$, eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten (ohne Rand), und L, eine glatte Untermannigfaltigkeit von N. *Beliebig nahe bei f gibt es ein glattes $g\colon M \to N$, das transversal zu L ist.* Es wird ausdrücklich nicht vorausgesetzt, dass M kompakt ist.

Beweis-Skizze: Gegeben seien kompakte Teilmengen $K_M \subset M$ und $K_L \subset L$. Wir suchen vorläufig $g\colon M \to N$ nahe bei f, so dass g die Transversalitätsbedingung

$$df_x(T_xM) + T_{f(x)}M = T_{f(x)}N$$

erfüllt in den Fällen, wo $x \in K_M$ und $f(x) \in K_L$. Genauer wollen wir zeigen, *dass die Menge $V(K_M, K_L)$ der $g\colon M \to N$ mit dieser Eigenschaft offen und dicht ist in $C^\infty(M,N)$*. Das ist auch so für sich genommen interessant. (Dafür brauchen wir natürlich eine Topologie auf $C^\infty(M,N)$; bis jetzt habe ich immer die C^1-Topologie genommen, aber wir können auch die C^r-Topologie für $r \geq 1$ oder sogar $r = \infty$ nehmen.) Dazu wollen wir eine Störung

$$F\colon U \times M \to N$$

von f konstruieren, wobei U offen in $\mathbb{R}^k$ und $0 \in U$, für ein grosses k. Die weiteren Bedingungen sind wie üblich

- $F(0,x) = f(x)$ für alle $x \in M$,
- Für $(v,x) \in U \times K_M$ mit $F(v,x) \in K_L$ gilt

$$dF_{(v,x)}(T_vU \times T_xM) + T_{F(v,x)}M = T_{F(v,x)}N\ .$$

Zu diesem Zweck wählen wir eine Riemannsche Metrik auf N und eine offene Umgebung W von K_M, die in einer kompakten Teilmenge von M enthalten ist, und ein glattes Vektorbündel E über W derart, dass $E \oplus f^*TN_{|W}$ glatt isomorph zu einem Produktvektorbündel $\mathbb{R}^k \times W$ ist. Wir versuchen es mit der folgenden Zusammensetzung

$$\mathbb{R}^k \times W \xrightarrow{\cong} E \oplus f^*TN_{|W} \xrightarrow{\text{proj.}} f^*TN_{|W} \xrightarrow{(x,v)\mapsto(f(x),v)} TN \xrightarrow{\exp} N \ ,$$

die $F^\sharp$ heissen soll. Die Definition ist allerdings nur sinnvoll in einer Umgebung von $\{0\} \times K_M \subset \mathbb{R}^k \times W$. Wir können annehmen, dass die Umgebung von der Form $U \times W'$ ist, U eine kleine offene Scheibe mit Zentrum 0 in $\mathbb{R}^k$ und W' eine neue offene Umgebung von K_M, womöglich kleiner als W. Also haben wir

$$F^\sharp : U \times W' \to N \ .$$

Jetzt wählen wir noch ein glattes $\psi: W' \to [0,1]$ mit kompaktem Träger derart, dass $\psi \equiv 1$ auf einer Umgebung von K_M. Dann können wir F von $U \times M$ nach N definieren durch $F(v,x) = F^\sharp(\psi(x) \cdot v, x))$ falls $x \in W'$, und $F(v,x) = f(x)$ falls $x \notin W'$.
Nach diesem erfolgreichen Störmanöver kommt der gewohnte zweite Schritt. Wir bilden $F^{-1}(L)$. Es gibt eine Umgebung von $F^{-1}(L) \cap (U \times K_M)$ in $F^{-1}(L)$, die eine glatte Untermannigfaltigkeit von $U \times W'$ ist. Wir wählen $v \in U$ nahe bei 0, das ein regulärer Wert ist für die Projektion dieser glatten Untermannigfaltigkeit auf U. Die entsprechende Abbildung $g : M \to N$ definiert durch $g(x) = F(v,x)$ von M nach N hat die gewünschten Eigenschaften.

Damit ist (eingermassen) gezeigt, dass $V(K_M, K_L)$ offen und dicht ist in $C^\infty(M,N)$. Die Menge der glatten $g: M \to N$, die transversal zu L sind, kann als ein Durchschnitt von abzählbar vielen solcher Mengen $V(K_M, K_L)$ beschrieben werden. Wegen Satz von Baire ist sie damit immer noch dicht (wenn auch nicht unbedingt offen).

Bemerkung. Wir haben hier die *schwache* Whitney-C^r-Topologie benutzt, die grob gesprochen die Topologie der gleichmässigen Konvergenz auf Kompakta (mit allen höheren partiellen Ableitungen bis zum Grad r) ist. Es gibt auch die *feine* (englisch *strong*) Whitney-Topologie; dazu am besten Golubitsky-Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, Kapitel II über Transversalität. Wenn M kompakt ist, gibt es keinen Unterschied zwischen der Schwachen und der Feinen. Die Feine hat aber im Fall von nichtkompaktem M viel mehr offene Mengen als die Schwache, so dass *dicht* in der feinen Whitney-Topologie eine stärkere Bedingung ist. In Golubitsky-Guillemin wird gezeigt, dass der Satz von Baire (abzählbarer Durchschnitt von offen dichten ist offen dicht) auch für die feine Whitney-C^∞-Topologie gilt. Damit gilt die Behauptung oben auch in der feinen Whitney-C^∞-Topologie: die Menge der glatten $g : M \to N$, die transversal zu L sind, ist dicht. Zugegeben, in dieser Form ist sie viel nützlicher. Es wird nicht behauptet, dass die feine Whitney-C^∞-Topologie vollständig metrisierbar ist.

Sie ist überhaupt nicht metrisierbar im Fall von nichtkompaktem M (denn es ist ziemlich klar, dass es keine abzählbaren Umgebungsbasen gibt).

Es blieb dann noch etwas Zeit, um mit dem Skript *Immersion theory for homotopy theorists* anzufangen. Der Hauptsatz der Immersionstheorie wurde erläutert. Das Skript soll uns einige Wochen beschäftigen.