Übersicht zu Differentialtopologie WS 2012/13 (Weiss)

Es gab noch ein paar Dinge zur Euler-Charakteristik im Fall von glatten kompakten Mannigfaltigkeiten mit Rand zu sagen. Hauptthema war dann eine dritte (und sehr wichtige, aber weniger bekannte) Variante von Transversalität, nämlich die Jet-Variante. Ich habe mich auf einen Spezialfall beschränkt (1-Jets), dessen Beweis aber schon das meiste von dem enthält, was man auch im allgemeinen Fall sieht. Es gab kleine Probleme mit der Durchführung. Eine wichtiges Korollar dieses Satzes ist die Existenz von Morse-Funktionen auf glatten Mannigfaltigkeiten.

Weitere Einzelheiten zur Euler-Charakteristik. Wir hatten $\chi(M)$ für beliebige kompakte glatte Mgftgkten *mit Rand* definiert als die "Anzahl" der Elemente in $s^{-1}(\zeta(M))$, wobei wie üblich $\zeta : M \to TM$ der Nullschnitt ist und $s : M \to TM$ ein anderer glatter Schnitt, der transversal zu $\zeta(M)$ ist und ausserdem für jeden Randpunkt $x \in \partial M$ einen Vektor $s \in T_xM$ auswählt, der nicht zu $T_x(\partial M)$ gehört und im übrigen "nach aussen" weist. Die Elemente in $s^{-1}(\zeta(M))$ müssen natürlich mit Vorzeichen $\pm$ gezählt werden; das Vorzeichen hängt wie im Fall von glatten Mannigfaltigkeiten ohne Rand vom Orientierungsverhalten ab.

Ein Transversalitätssatz für Jets. Literatur dazu: Golubitsky-Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, Springer GTM; Kapitel über *Transversality.* Meine Darstellung unten benutzt das zwar nicht, hält sich aber an das Vorbild.

Gegeben seien glatte Mannigfaltigkeiten M und N, der Einfachheit halber ohne Rand. Wir haben schon gelegentlich $J^1(M,N)$ benutzt, den Raum der Tripel (x,y,A) wobei $x \in M$, $y \in N$ und $A \in \mathrm{Hom}(T_xM, T_yN)$. Wir können $J^1(M,N)$ als Totalraum eines glatten Vektorbündels über $M \times N$ auffassen, nämlich $\mathrm{Hom}(E,F)$, wobei

$$E = TM \times N \ , \qquad F = M \times TN \ ,$$

mit den Projektionen nach $M \times N$, die durch die Standard-Projektionen $TM \to M$ und $TN \to N$ induziert werden. (Hierbei gebe ich mich der schlechten aber bequemen Gewohnheit hin, ein Vektorbündel mit seinem Totalraum zu verwechseln.)

Damit ist $J^1(M,N)$ eine glatte Mannigfaltigkeit. Es dient uns als so etwas wie ein Behälter für erste Ableitungen von glatten Abbildungen von M nach N. Genauer: jedes glatte $f\colon M \to N$ bestimmt eine Abbildung

$$j^1 f\colon M \to J^1(M,N)$$

durch $j^1 f(x) := (x, f(x), df_x)$ wobei $df_x : T_x M \to T_{f(x)} N$ natürlich das Differential von f ist. Die Abbildung $j^1 f$ heisst 1-Jet-Verlängerung von f. (Da die Übersetzung von mir stammt, bin ich nicht sicher ... jedenfalls 1-*jet prolongation* auf Englisch.)
Sei L eine glatte Untermannigfaltigkeit von $J^1(M,N)$. Der Transversalitätssatz für 1-Jets, der bewiesen werden soll, besagt folgendes: *Gegeben glattes $f : M \to N$, wobei M kompakt. Dann existiert beliebig nahe bei f ein glattes $g : M \to N$ derart, dass $j^1 g : M \to J^1(M,N)$ transversal zu L ist.*
Der Beweis zerfällt wie üblich in zwei Schritte, ein Störmanöver und eine Anwendung des Satzes von Sard. Hier ist besonders der erste Schritt schwierig. Der zweite dagegen ist Routine und soll auch nur angedeutet werden.
Beim Störmanöver wollen wir ein $k \geq 0$, eine offene Umgebung U von $0 \in \mathbb{R}^k$ und eine glatte Abbildung

$$F : U \times M \to N$$

konstruieren mit nützlichen Eigenschaften. Um die nützlichen Eigenschaften zu formulieren, schreiben wir $f^v(x) = F(v,x)$ für $v \in U \subset \mathbb{R}^k$; wir fassen also F auf als eine Familie von glatten Abbildungen $f^v : M \to N$, wobei $v \in U$. Wir verlangen:

(i) $f^0 \equiv f$;
(ii) die Abbildung $U \times M \longrightarrow J^1(M,N)$ gegeben durch $(v,x) \mapsto j^1 f^v(x)$ ist transversal zu L.

Diese Forderungen sind in einem Arbeitsgang nicht leicht zu erfüllen. Deswegen schwächen wir (ii) vorläufig ab, indem wir ein $x \in M$ festhalten und nur verlangen, dass die Einschränkung von $U \times M \longrightarrow J^1(M,N)$ auf $U \times Q$ transversal ist zu L, wobei Q eine offene Umgebung von x in M sein soll. Die abgeschwächte Bedingung soll $(\mathrm{ii})_x$ heissen und die entsprechende Storung soll $F^{(x)}$ heissen.
Jetzt also zur Konstruktion von $F^{(x)}$. Sei $y = f(x)$ und V_y eine offene Kartenumgebung von y in N, die wir irgendwie (durch glatten Diffeomorphismus) mit einer offenen Umgebung W_y von $0 \in \mathbb{R}^n$ identifizieren. Sei V_x eine offene Umgebung von $x \in M$, die durch f nach V_y abgebildet wird, und die wir auch irgendwie (durch glatten Diffeomorphismus) mit einer offenen Umgebung W_x von $0 \in \mathbb{R}^m$ identifizieren. In den lokalen Koordinaten, die wir auf diese Weise eingerichtet haben, können wir also f als Abbildung von W_x nach W_y auffassen. Wir wählen ausserdem ein glattes $\psi : W_x \to [0,1]$ mit kompaktem Träger, das in einer Umgebung von 0 konstant mit Wert 1 ist. Wir setzen

$$k = n + mn$$

und $\mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^n \times \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, und für $(w, A) \in \mathbb{R}^n \times \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ schreiben wir versuchsweise

$$f^{(w,A)}(z) = f(z) + \psi(|z|) \cdot (w + A(z))$$

wobei $z \in W_x$ sein soll und die rechte Seite in W_y. Wenn w and A klein genug sind, dann ist die rechte Seite wohldefiniert. Mit anderen Worten, für (w, A) in einer genügend kleinen Umgebung U von $0 \in \mathbb{R}^n \times \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ ist die Definition von $f^{(w,A)}$ in lokalen Koordinaten sinnvoll. Ausserdem ist $f^{(w,A)} \equiv f$ ausserhalb des Trägers von ψ, so dass wir $f^{(w,A)}$ ausserhalb von V_x mit f gleichsetzen können (natürlich dann ohne Benutzung der lokalen Koordinaten). Die Abbildung

$$U \times M \longrightarrow J^1(M, N)$$

gegeben durch $((w, A), x) \mapsto j^1 f^{(w,A)}(x)$ hat jetzt an der Stelle $(0, x)$ ein surjektives Differential. (Dazu genügt es, sich die partiellen Ableitungen in den U-Richtungen an der Stelle $(0, x)$ anzuschauen.) Demnach gibt es eine offene Umgebung der Form $U' \times Q$ von $(0, x)$ in $U \times M$ derart, dass dieselbe Abbildung surjektives Differential hat an jeder Stelle in Q. OBdA ist $U' = U$. Damit ist unser Problem gelöst; das heisst, wenn wir $F^{(x)}$ definieren durch $((w, A), z) \mapsto f^{(w,A)}(z)$ für alle $(w, A) \in U$ und $z \in M$, dann sind Bedingungen (i) und (ii)$_x$ für $F^{(x)}$ erfüllt.
Wir können nun für jedes $x \in M$ eine Störung

$$F^{(x)} \colon U^{(x)} \times M \to N$$

von f konstruieren wie oben, $U^{(x)}$ offen in $\mathbb{R}^k$, so dass (i) und (ii)$_x$ erfüllt sind; genauer gesagt soll die Einschränkung von $U^{(x)} \times M \longrightarrow J^1(M, N)$ auf $U^{(x)} \times Q^{(x)}$ transversal zu L sein. Dabei kann k unabhängig von x gewählt werden, $k = n + mn$. Dann können wegen Kompaktheit von M endlich viele von den x ausgewählt werden, so dass die entsprechenden $Q^{(x)}$ ganz M überdecken. OBdA sind die ausgewählten $U^{(x)}$ alle gleich, und wir können sie alle $U^\sharp$ nennen. Ausserdem können wir dann die ausgewählten $F^{(x)}$ durchnumerieren, so dass wir

$$F^{(s)} \colon U^\sharp \times M \longrightarrow N$$

haben für $s = 1, 2, \ldots, r$, wobei die Einschränkung auf $U^\sharp \times Q^{(s)}$ der Verlängerung $U^\sharp \times M \longrightarrow J^1(M, N)$ von $F^{(s)}$ transversal zu L ist. Jetzt versuchen wir, aus den Störungen $F^{(s)}$ für $s = 1, \ldots, r$ eine Gesamtstörung

$$F \colon \underbrace{U^\sharp \times U^\sharp \times \cdots \times U^\sharp}_{r} \times M \longrightarrow N$$

von f zu konstruieren. Man ist geneigt, die Teilstörungen zu addieren, also es mit einer Formel wie

$$F(v_1, v_2, \ldots, v_r, z) = f(z) + \sum_{s=1}^{r} F(v_s, z) - f(z)$$

zu versuchen. Kann man dieser Formel einen Sinn geben? Ja. Wir nehmen dazu an, dass N mit einer Riemannschen Metrik versehen ist. Dann gibt es Exponentialabbildungen $\exp_y$, die für jedes $y \in N$ auf einer Umgebung von $0 \in T_yN$ definiert sind, mit Ziel N. Wir können die Formel oben präzisieren wie folgt:

$$F(v_1, v_2, \ldots, v_r, z) = \exp_{f(z)}\left(\sum_{s=1}^{r} \exp_{f(z)}^{-1}(F(v_s, z))\right)$$

Jetzt findet die Addition in $T_{f(x)}N$ statt, ist also sinnvoll. Andererseits ist es möglich, dass $\exp_{f(z)}$ oder das Inverse dazu nicht da definiert sind, wo wir sie brauchen; solange aber die $v_1, \ldots, v_r$ klein genug sind, tritt dieses Problem nicht auf. Kurz, durch Verkleinern von $U^\sharp$ können wir erreichen, dass F wohldefiniert ist. Damit haben wir schliesslich und endlich erreicht, dass die Bedingungen (i) und (ii) für F erfüllt sind; das aktuelle k ist $r(n+nm)$ und das aktuelle U ist $U^\sharp \times U^\sharp \times \cdots U^\sharp$.
Alles weitere ist, wie gesagt, Routine. Wir bilden das Urbild von L unter der Verlängerung $U \times M \to J^1(M, N)$ von F. Es ist eine glatte Untermannigfaltigkeit L' von $U \times M$. Wir suchen uns einen regulären Wert v der Projektionsabbildung $L' \to U$ aus, so nahe bei $0 \in U$, wie wir wollen. Dann hat das entsprechende

$$g := f^v : M \to N$$

die gewünschten Transversalitätseigenschaften.

Anwendung: Existenz von Morse-Funktionen. Es handelt sich um den Spezialfall vom Transversalitätssatz oben, in dem $N = \mathbb{R}$ ist und

$$L = \{(x, y, 0)\} \subset J^1(M, N)\ .$$

Das heisst, L besteht aus den Tripeln (x, y, A) mit $x \in M$, $y \in N$ und $A \in \mathrm{Hom}(T_xM, T_yN)$, bei denen $A = 0$ ist. Die Transversalitätsbedingung für ein glattes $f : M \to \mathbb{R}$ ist dann gleichbedeutend mit der Bedingung, dass die totale Ableitung von f, aufgefasst als glatter Schnitt $df : M \to T^*M$ des Kotangentialbündels, transversal ist zum Nullschnitt. Das Kotangentialbündel ist dabei das Vektorbündel, das man aus dem Tangentialbuendel $TM \to M$ durch fasernweise Anwendung von $\mathrm{Hom}(-, \mathbb{R})$ erhält.
Wir hatten uns überlegt, dass diese Bedingung zu folgender gleichwertig ist: An jeder Stelle $x \in M$, wo das Differential df_x verschwindet, ist die

zweite Ableitung (in lokalen Koordinaten, aufgefasst als symmetrische $m\times m$-Matrix) nichtdegeneriert. Sie kann auch als selbstadjungierter linearer Isomorphisms $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ aufgefasst werden. So ein Ding besitzt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. Wir interessieren uns für die Summe der Dimensionen der Eigenräume mit negativen Eigenwerten. Diese Zahl ist unabhängig von der Wahl der lokalen Koordinaten, wie man leicht sieht (demnächst vielleicht auch Übungsaufgabe). Sie heisst der *Index* der zweiten Ableitung (von f, an der Stelle x) oder ähnlich. Er kann offenbar zwischen 0 und $m = \dim(M)$ variieren. Dabei entspricht Index 0 einem lokalen Minimum, während Index m einem lokalen Maximum entspricht. Die anderen Fälle sind verschiedene Satteltypen.