Fünfte Vorlesungswoche

Übersicht zu Differentialtopologie WS 2012/13 (Weiss)

Leichte Anwendungen des einfachsten Transversalitätssatzes wurden behandelt. Im Zusammenhang damit wurden Mannigfaltigkeiten mit Rand und die Bordismusrelation eingeführt. Weiter gehören zu diesem Bereich vor allem die Begriffe *Abbildungsgrad* (im unorientierten Fall und im orientierten Fall) und *Euler-Charakteristik*. Die Diskussion von Euler-Charakteristik hat uns auf eine Variante des Transversalitätssatzes für glatte Schnitte von glatten Vektorbündeln geführt.

Glatte Mannigfaltigkeiten mit Rand. Gut nachzulesen bei Bröcker und Jänich. Wir vereinbaren, dass bei einer glatten m-dimensionalen Mgftkt M mit Rand das Tangentialbündel weiter mit TM bezeichnet wird und als ein m-dimensionales Vektorbündel verstanden wird. Dann ist $T(\partial M)$ ein Unter-Vektorbündel (Kodimension 1) von der Einschränkung $TM|\partial M$.
Sei M eine glatte Mgftkt mit Rand. Wir sagen, dass M orientiert ist, wenn TM orientiert ist. Dann gibt es eine Vereinbarung dazu, wie man $T(\partial M)$ und damit ∂M orientiert. Wir sagen nämlich, dass eine geordnete Basis $(e_1, \dots, e_{m-1})$ von $T_x\partial M$ (für ein $x \in \partial M$) *positiv* ("richtig orientiert") ist, falls die Basis $(n, e_1, \dots, e_{m-1})$ von T_xM positiv ist, wobei $n \in T_xM$ ein Tangentialvektor bei x ist, der ausdrücklich nicht zu $T_x\partial M$ gehoert und stattdessen weg von M nach draussen weist. Beispiel: Für $M = [0, 1]$ mit der Standard-Orientierung (von links nach rechts) ist der Punkt 0 von ∂M negativ orientiert und der Punkt 1 von ∂M ist positiv orientiert. Für $M = D^2$ mit der üblichen Orientierung, geerbt von $\mathbb{R}^2$, ist der Rand S^1 im Anti-Uhrzeigersinn orientiert. Ich merke mir: ONF (outward normal first).
Wir brauchen auch die folgende Verfeinerung. Sei N eine glatte Mannigfaltigkeit der Dim m, mit Rand. Eine Teilmenge $L \subset N$ heisst *saubere glatte Untermannigfaltigkeit* (Dimension ℓ) *von* N, falls

- zu jedem $x \in L \smallsetminus \partial N$ eine Karte $\psi : U \to U' \subset \mathbb{R}^n$ für $N \smallsetminus \partial N$ existiert derart, dass $x \in U$ und dass $U \cap L$ mit $U' \cap \mathbb{R}^\ell$ identifiziert wird;
- zu jedem $y \in L \cap \partial N$ eine Karte $\psi : U \to U' \subset \mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$ für N existiert derart, dass $y \in U$ und dass $U \cap L$ mit
$$U' \cap (\mathbb{R}^{\ell-1} \times [0, \infty))$$
identifiziert wird.

Dann ist L ganz von selbst eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand; der Rand ist nämlich $\partial L := L \cap \partial M$. Dann ist auch $L \smallsetminus \partial N$ eine glatte Untermannigfaltigkeit von $N \smallsetminus \partial N$, und ∂L eine glatte Untermannigfaltigkeit von

∂N. Ausserdem machen L und ∂N einen *transversalen* Durchschnitt ∂L. (*Erklären*!)

Sei jetzt M eine glatte Mgftkt mit Rand, N eine glatte Mgftkt ohne Rand und $L \subset N$ eine glatte Untermgftkt (ohne Rand). Sei $f : M \to N$ glatt; wir sagen, dass f transversal zu L ist (im stärkeren Sinn), falls für $x \in f^{-1}(L)$ die übliche Bedingung

$$df(T_x M) + T_{f(x)} L = T_{f(x)} N$$

gilt und ausserdem für $x \in f^{-1}(L) \cap \partial M$ die stärkere Bedingung

$$df(T_x \partial M) + T_{f(x)} L = T_{f(x)} N \ .$$

Dann ist $f^{-1}(L)$ eine saubere glatte Untermannigfaltigkeit von M.

Noch eine Bemerkung zu Transversalität ist wichtig. Sei L eine glatte Untermgftkt von N. Sei $j : L \to N$ die Inklusion. Wir nennen j^*TN/TL das Normalenbündel von L in N. Es ist ein Vektorbündel über L (Einschr von TN auf L, geteilt durch das Untervektorbündel TL). Gegeben jetzt glatte Mannigfaltigkeiten M und N sowie eine glatte Untermannigfaltigkeit L von N, und eine glatte Abbildung $f : M \to N$, die transversal zu L ist. Dann gibt es einen Vektorbündelisomorphismus von Vektorbündeln über $f^{-1}L$,

$$f^*(\textit{Normlbdl von } L \textit{ in } N) \cong \textit{Normlbdl von } f^{-1}(L) \textit{ in } M \ .$$

Der Beweis ist leicht. Bemerkung bleibt gültig, sinnvoll usw, wenn M Rand hat. Im Zusammenhang mit Normalenbündeln und allgemeiner Quotientenvektorbündeln ist uns auch Folgendes wichtig.

- Sei $A \to B \to C$ eine kurze exakte Folge von reellen endl-dim Vektorräumen (d.h. $A \to B$ ist injektiv, $B \to C$ ist surjektiv und der Kern von $B \to C$ ist das Bild von $A \to B$). Wenn zwei der Vektorräume A, B, C orientiert sind, dann bestimmt das eine Orientierung für den dritten. Zum Beispiel, wenn wir geordnete Basen für A und C haben, dann können wir die geordnete Basis von C anheben zu einer geordneten Basis von B und an die geordnete Basis von A hinten anhängen ...
- Sei $A \to B \to C$ eine kurze exakte Folge von Vektorbündeln über einem Raum X. Wenn zwei der Vektorbündel A, B, C orientiert sind, dann bestimmt das eine Orientierung für das dritte.

Ein wichtiger Spezialfall von Mannigfaltigkeit mit Rand ist $M \times [0,1]$, wenn M eine Mannigfaltigkeit ohne Rand ist. Diese Objekte tauchen auf, wo glatte Homotopien auftauchen. Speziell: Gegeben glattes N mit glatter Untermannigfaltigkeit L, alles ohne Rand, und M ohne Rand, und glattes $f : M \to N$. Wir wählen g_0 homotop zu f und transversal zu L. Wir wollen wissen, wie sehr die glatte Mannigfaltigkeit $g_0^{-1}(L)$ von der Wahl von

g_0 abhängt. Um das zu sehen, wählen wir ein g_1 auch homotop zu f und transversal zu L. Dann sind g_0, g_1 glatt homotop. Die Homotopie ist eine glatte Abb

$$G : M \times [0,1] \longrightarrow N$$

und nach unseren Sätzen können wir oBdA annehmen, dass sie wieder transversal zu L ist, ohne zu verzichten auf $G(x,0) = g_0(x)$ und $G(x,1) = g_1(x)$. Dann ist $W = G^{-1}(L)$ eine saubere glatte Untermannigfaltigkeit von $M \times [0,1]$, die eine gewisse Beziehung herstellt zwischen $g_0^{-1}(L)$ und $g_1^{-1}(L)$. Denn der Rand von W ist die disjunkte Vereinigung von $g_0^{-1}(L)$ und $g_1^{-1}(L)$. Diese Beziehung heisst, grob gesprochen, *Bordismus* (Substantiv) oder *bordant* (Adjektiv).

Bordismus-Relation. Gut nachzulesen (im un-orientierten Fall) bei Bröcker-Jänich, Kapitel über Mannigfaltigkeiten mit Rand. Im orientierten Fall geht die Definition etwa wie folgt: Zwei kompakte glatte orientierte Mannigfaltigkeiten M, N der Dim m sind *bordant*, falls eine kompakte glatte orientierte Mannigfaltigkeit W mit Rand existiert, $\dim(W) = m+1$, derart dass ∂W orientiert diffeomorph zu $-M \amalg N$ ist. Dabei bezeichnet $\amalg$ die disjunkte Vereinigung und $-M$ ist M mit der Orientierung, die zur gegebenen engtgegengesetzt ist. Das W wird auch als *Bordismus* von M nach N bezeichnet.

Die Bordismusrelation ist eine Äquivalenzrelation (für kompakte Mannigfaltigkeiten ohne Rand, von einer festen Dimension M). Symmetrie und Reflexivität sind einigermassen klar. Leider sind wir (noch) nicht besonders gut qualifiziert, die Transitivität zu beweisen! Ich muss das etwas aufschieben. Es fehlt uns der Satz über Existenz von Kragen für glatte Mannigfaltigkeiten mit Rand. (Vorläufig gut nachzulesen bei Bröcker-Jänich.) Ein Kragen für eine glatte Mannigfaltigkeit M mit Rand ist ein Diffeomorphismus

$$\psi : \partial M \times [0,1) \to U$$

wobei U offene Umgebung von ∂M in M, mit $\psi(x,0) = x$ für alle $x \in \partial M$. Es ist klar, dass man genau das braucht, um die Transitivität der Bordismusrelation zu beweisen.

Wenn wir akzeptieren, dass die Bordismusrelation eine Äquivalenzrelation ist, dann ist allerdings klar, dass die Menge der Äquivalenzklassen (für feste Dimension m) eine abelsche Gruppe E_m bildet. Die Addition ist gegeben durch disjunkte Vereinigung von Repräsentanten. Das Inverse zu einer gegebenen Mgftkt M ist wieder M (im unorientierten Fall), oder $-M$ (im orientierten Fall). In beiden Fällen ist $M \times [0,1]$ ein Bordismus, der es beweist.

Beispiele: Wir haben erörtert, dass E_0 im unorientierten Fall zu $\mathbb{Z}/2$ isomorph ist, und im orientierten Fall zu $\mathbb{Z}$. Es wurde auch erörtert, dass E_1

gleich Null ist (im unorientierten und im orientierten Fall) und dass E_2 im unorientierten Fall ein nicht-triviales Element besitzt, die Bordismenklasse von $\mathbb{R}P^2$. (Wir werden bald in der Lage sein, das zu beweisen.)

Anwendung von allem, was oben gesagt wurde: Gegeben m-dimensionale kompakte Mannigfaltigkeiten M, N ohne Rand und eine glatte Abbildung $f\colon M \to N$. Wir wählen $p \in M$ und $g\colon M \to N$ glatt homotop zu f und transversal zu p. Dann ist $g^{-1}(p)$ eine glatte kompakte 0-dimensionale Untermgftkt von M, also eine endliche Menge. Ihre Bordismenklasse ist wohldefiniert und hängt sogar (offenbar) nur von der glatten Homotopieklasse von f ab. Nach dem, was vorher gesagt wurde, ist sie ein Element von $\mathbb{Z}/2$. In dem Fall, wo M und N beide orientiert sind, wird $g^{-1}(p)$ auch eine orientierte 0-dimensionale Mannigfaltigkeit, und wieder hängt die Bordismenklasse nur von der glatten Homotopieklasse von f ab. Sie ist in diesem Fall ein Element von $\mathbb{Z}$. Dieses Element heisst der *Abbildungsgrad* von f. Eignet sich hervorragend für Übungsaufgaben.

Eine weitere Anwendung: Euler-Charakteristik von kompakten Mannigfaltigkeiten. Wir behandeln zuerst den orientierbaren Fall. Sei also M glatt, orientiert, kompakt, von der Dimension m. Wir wollen dann auch den Totalraum TM des Tangentialbündels orientieren (als Mgftkt der Dimension $2m$). Sei $p\colon TM \to M$ die Projektion und $\zeta : M \to TM$ die Inklusion (des Nullschnitts). Da es eine kurze exakte Folge von Vektorbündeln über dem Totalraum TM gibt,

$$p^*TM \to T(TM) \to p^*TM$$

(Inklusion der "vertikalen" Vektoren und Projektion auf die "horizontalen" Komponenten) wissen wir, wie wir die Mannigfaltigkeit TM zu orientieren haben. Wir wählen dann glattes $g : M \to TM$ glatt homotop zu ζ derart, dass g tranversal ist zur Untermgftkt $\zeta(M) \subset TM$. Also ist $g^{-1}(\zeta(M))$ eine kompakte 0-dimensionale orientierte glatte Untermannigfaltigkeit von M. Das entsprechende Element in der orientierten Bordismengruppe $E_0 \cong \mathbb{Z}$ ist wohldefiniert, das heisst unabhängig von der Wahl von glattem g homotop zu ζ. Wir nennen es, wie schon angedeutet, die Euler-Charakteristik von M. (Diese Beschreibung der Euler-Charakteristik ist äusserst unsystematisch. In anderen Darstellungen wäre sie eher ein Satz als eine Definition.)
Man überlegt sich leicht, dass bei einer Änderung der Orientierung von M die Euler-Charakteristik unverändert bleibt. Das deutet an, dass die Euler-Charakteristik auch für nicht-orientierte Mannigfaltigkeiten einen Sinn haben sollte. Um das zu bestätigen, brauchen wir eine neue Variante des Transversalitätssatzes.

Transversalität für Schnitte. Es sei $p\colon V \to M$ ein glattes Vektorbündel, wobei M kompakt ist (zunächst ohne Rand). Sei $L \subset V$ eine glatte Untermannigfaltigkeit und $s_0\colon M \to V$ ein glatter Schnitt. *Dann existiert beliebig nahe bei s_0 ein glatter Schnitt $s\colon M \to V$, der transversal zu L ist.*

Bemerkungen zur Formulierung. Wo wir sagen, dass s transversal zu L ist, fassen wir s einfach als glatte Abbildung von M nach V auf, ohne weiter zu berücksichtigen, dass $ps = \mathrm{id}_V$ ist. Wo wir sagen *nahe bei* s_0, meinen wir zum Beispiel die kompakt-offene C^1-Topologie auf $C^\infty(M, V)$, und die davon induzierte Unterraumtopologie auf der Menge der glatten Schnitte von $p : V \to M$.
Bemerkungen zum Beweis. Wir folgen dem üblichen Schema. Schritt I: Wir konstruieren eine Störung

$$S\colon \mathbb{R}^k \times M \longrightarrow V$$

von s_0, womit gemeint sein soll, dass S glatt ist, transversal zu L, und pS gleich Projektion $\mathbb{R}^k \times M \to M$, und $S(0,x) = s_0(x)$ für alle $x \in M$. Um das zu erreichen, können wir ein glattes Vektorbündel $W \to M$ wählen mit der Eigenschaft, dass $V \oplus W \cong \mathbb{R}^k \times M$ (triviales Vektorbündel), also W invers zu V im Sinne der Whitneysumme von Vektorbunedeln über M. Dann haben wir die Projektion $\mathbb{R}^k \times M \to V$ und wir können sie mit s_0 in vertikaler Richtung verschieben. Das heisst, wir denken uns Elemente von $\mathbb{R}^k \times M$ als Tripel (v, w, x) wobei $x \in M$ und $v \in V_x$, $w \in W_x$; dann wird $S(v, w, x) = (x, v + s_0(x)) \in V_x$. Schritt II: Wir bilden $S^{-1}(L)$, glatte Untermannigftkt von $\mathbb{R}^k \to M$, und wählen unter Berufung auf Sard einen regulären Wert $u \in \mathbb{R}^k$ der Projektion $S^{-1}(L) \to \mathbb{R}^k$ aus, so nahe bei 0, wie wir Lust haben. Dann ist die Abbildung von M nach V gegeben durch $x \mapsto S(u, x)$ ein Schnitt von $p\colon V \to M$, der transversal zu L ist.

Fortsetzung folgt!