Vierte Vorlesungswoche

Übersicht zu Differentialtopologie WS 2012/13 (Weiss)

Gegen Ende der dritten Woche habe ich etwas von Strukturen auf Vektorbündeln erzählt (hauptsächlich Riemannsche Metriken und Orientierungen). Vieles davon schien allen bekannt zu sein. Dann ging es um ein paar grundlegende Definitionen zum Thema Transversalität.

Definition. Gegeben glatte Mannigfaltigkeiten M und N sowie eine glatte Untermannigfaltigkeit L von N. Eine glatte Abbildung $f : M \to N$ ist *transversal* zu L, wenn für jedes $x \in M$ mit $f(x) \in L$ gilt, dass

$$df(T_xM) + T_{f(x)}L = T_{f(x)}N \ .$$

Gleichwertig dazu: die Zusammensetzung

$$T_xM \xrightarrow{df} T_{f(x)}M \xrightarrow{\text{Proj.}} T_{f(x)}M/T_{f(x)}L$$

ist eine surjektive (lineare) Abbildung. (Beachten, dass das + Zeichen in $df(T_xM)+T_{f(x)}L$ kein $\oplus$ ist und dass $df(T_xM)$ das Bild der linearen Abbildung $df : T_xM \to T_{f(x)}N$ ist, von der wir keineswegs Injektivität fordern.)

Beispiel. Eine glatte Abbildung $f : M \to N$ heisst *Submersion*, wenn für jedes $x \in M$ das Differential $df : T_xM \to T_{f(x)}N$ surjektiv ist. Wie aus der Definition oben ersichtlich, ist eine Submersion transversal zu *jeder* glatten Untermannigfaltigkeit L von N.

Satz. *Wenn* $f : M \to N$ *transversal zu* $L \subset N$ *ist* (wie in der Definition oben)*, dann ist* $f^{-1}(L)$ *eine glatte Untermannigfaltigkeit von* M*. Ausserdem ist* $\dim(M) - \dim(f^{-1}(L)) = \dim(N) - \dim(L)$.

Der Beweis ist Routine und kann an vielen Stellen nachgelesen werden (z.B. Bröcker-Jänich).
Danach habe ich vorgestellt: Satz von Sard (ohne Beweis) und Satz von Baire (mit Beweisskizze). Der Satz von Sard ist ein höchst origineller Satz, der im Zusammenhang mit Transversalität sehr wichtig ist. Dazu brauchen wir eigentlich erst wieder ein paar Definitionen:

Definition. Sei $f : M \to N$ eine glatte Abbildung. Ein $y \in N$ heisst *kritischer Wert* von f, falls ein $x \in M$ existiert, für das $f(x) = y$ und das Differential $df : T_xM \to T_{f(x)}N$ *nicht* surjektiv ist. Im entgegengesetzten Fall sagt man, dass $y \in N$ ein regulärer Wert ist. (Speziell ist $y \in N$ ein regulärer Wert, wenn es überhaupt nicht im Bild von f ist.)

Bemerkung. Ein $y \in N$ ist genau dann regulärer Wert von $f : M \to N$, wenn f transversal zur Untermannigfaltigkeit $\{y\} \subset N$ ist. Insbesondere ergibt sich daraus, dass das Urbild $f^{-1}(y)$ eine glatte Untermannigfaltigkeit von M ist.

Definition. Eine Teilmenge C einer glatten Mannigfaltigkeit N hat das *Lebesgue-Mass Null*, wenn für jede Karte $\psi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ in einem Atlas für N die Teilmenge $\psi(U \cap C)$ von $\mathbb{R}^n$ das n-dimensional Lebesgue-Mass Null hat.

Bemerkung. Es genügt, wenn wir das für alle Karten in einem Atlas prüfen (der also nicht maximal sein muss).

Satz (von Sard.) *Die Menge der kritischen Werte einer glatten Abbildung $f : M \to N$ hat Lebesgue-Mass Null.*

Der Beweis ist nicht Routine, kann aber trotzdem an vielen Stellen nachgelesen werden (z.B. wieder Bröcker-Jänich). Bei J Milnor (Topology from the differentiable viewpoint) gibt es mehr Auskunft; z.B. genügt es, vorauszusetzen, dass f nur r mal stetig differenzierbar ist (wobei r irgendwie in interessanter Weise von $\dim(M)$ un $\dim(N)$ abhängt).

Satz (von Baire.) *In einem vollständigen metrischen Raum X ist jeder Durchschnitt von abzählbar vielen offen dichten Teilmengen von X immer noch dicht in X.*

Der Beweis ist sehr leicht und kann in vielen Büchern über allgemeine Topologie nachgelesen werden.

Es ist klar, dass da irgendwie eine Verwandtschaft zwischen den Sätzten von Sard und Baire besteht. Dazu einige Bemerkungen: man kann sehr leicht zeigen, dass eine Teilmenge einer glatten Mannigfaltigkeit N, die das Lebesgue-Mass Null hat, ein dichtes Komplement hat. Das Komplement muss aber nicht offen sein. Umgekehrt: es gibt offene und gleichzeitig dichte Teilmengen von Mannigfaltigkeiten wie zum Beipiel $\mathbb{R}$ oder S^1, deren Komplement nicht das Lebesgue-Mass Null hat.

Jetzt zur ersten Hälfte der vierten Vorlesungswoche. Ich habe einen Beweis des Proto-Transversalitätssatzes gegeben. Wie ich immer betone, gibt es viele Typen von Transversalitätssätzen, aber mir scheint, dass die Beweise in allen Fällen demselben Muster folgen. Dieses Muster sollte also vorgestellt werden. Trotzdem ist es gut, wenn wir eine klare Aussage haben.

Satz. (Transversalität, Prototyp.) *Sei $f : M \to N$ eine glatte Abbildung, wobei M kompakt ist. Sei L eine glatte Untermannigfaltigkeit von N. Dann existiert ein glattes $g : M \to N$ beliebig nahe bei f derart, dass g transversal zu L ist.*

Leider müssen wir uns klarmachen, bevor wir an den Beweis gehen, was wir mit *g beliebig nahe bei f* meinen. Wir meinen natürlich, dass wir uns eine

Topologie auf der Menge $C^\infty(M,N)$ der glatten Abbildungen von M nach M vorstellen. Beliebig nahe bei f heisst dann einfach: in jeder beliebigen Umgebung von f. Was soll diese Topologie auf $C^\infty(M,N)$ sein? Wir haben eine Wahl, und um es nicht zu kompliziert zu machen, wähle ich die C^1-Topologie. Sie ist folgendermassen definiert.
Sei $J^1(M,N)$ die Menge aller Tripel (x,y,f) wobei $x \in M$, $y \in N$ und $f \in \mathrm{Hom}(T_xM, T_yN)$, das heisst, f ist eine lineare Abbildung von T_xM nach T_yN. Diese Menge $J^1(M,N)$ können wir uns vorstellen als den Totalraum eines Vektorbündels über $M \times N$. Es ist nämlich das differenzierbare Vektorbündel $\mathrm{Hom}(E,F)$, wobei $E = TM \times N$ (mit Projektion nach $M \times N$) und $F = M \times TN$ (auch mit Projektion nach $M \times N$). Also hat $J^1(M,N)$ schon eine Topologie (und sogar die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit).
Eine glatte Abbildung $f : M \to N$ bestimmt eine glatte Abbildung

$$j^1 f : M \to J^1(M,N)$$

durch $x \mapsto (x, f(x), df_x)$, wobei df_x hier das Differential von f an der Stelle x bezeichnen soll. Dieses $j^1 f$ wird manchmal *die* 1*-Jet-Verlängerung von* f genannt. Nun sei $K \subset M$ eine kompakte Teilmenge und $U \subset J^1(M,N)$ eine offene Teilmenge. Sei $Y_{K,U}$ die Menge aller glatten $f : M \to N$ mit der Eigenschaft $j^1 f(K) \subset U$. Die Teilmengen $Y_{K,U}$ von $C^\infty(M,N)$ sollen eine Subbasis einer Topologie auf $C^\infty(M,N)$ bilden. Man erlaubt also endliche Durchschnitte von solchen als offene Mengen, und dann auch beliebige Vereinigungen von solchen endlichen Durchschnitten. Die so definierte Topologie ist die C^1-Topologie.

Jetzt zum Beweismuster Transversalität, vorgestellt am Beispiel des Proto-Transversalitätssatzes wie oben formuliert.

- Schritt I. Wir konstruieren eine *Störung* von f, womit gemeint sein soll: eine offene Umgebung U von $M \times \{0\}$ in $M \times \mathbb{R}^p$ und eine glatte Abbildung $F : U \to N$ derart, dass $F(x,0) = f(x)$ ist für alle $x \in M$. Dabei darf p sehr gross sein. Es soll so gemacht werden, dass F transversal zu L ist.
- Schritt II. Wir bilden $F^{-1}(L)$, oder genauer, $F^{-1}(L) \cap U$. Das ist dann eine glatte Untermannigfaltigkeit W von U, wegen Satz oben. Wir haben die Projektion $\pi : W \to \mathbb{R}^p$. Nach dem Satz von Sard hat sie reguläre Werte $v \in \mathbb{R}^p$ beliebig nahe bei 0. Wir wählen ein solches v, regulärer Wert von π, und zwar wenigstens so nahe bei 0, dass $M \times \{v\}$ noch ganz in U enthalten ist. (Das ist möglich wegen der Kompaktheit von M.) Wir sollten auch sicherstellen, dass die Abbildung $g : M \to N$ gegeben durch $g(x) \mapsto F(x,v)$ in einer vorgegebenen Umgebung von $f \in C^1(M,N)$ liegt. Siehe dazu eine der zahlreichen Bemerkungen unten. Wir zeigen dann, routinemässig,

dass die eben definierte Abbildung g, mit $g(x) = F(x,v)$, transversal zu L ist. Fertig.

Die Einzelheiten gehen so. Um F wie in Schritt I zu konstruieren, wählen wir ein glattes Vektorbündel E über M derart, dass die Whitney-Summe $E \oplus f^*TN$ eine triviales Vektorbündel über M ist. (Haben wir eigentlich schon gezeigt, dass jedes glatte Vektorbündel über einer kompakten Mannigfaltigkeit ein Inverses im Sinne der Whitney-Summe besitzt? Dazu eine Bemerkung weiter unten.) Wir können dann also schreiben

$$M \times \mathbb{R}^p \cong E \oplus f^*TN ,$$

Isomorphismus von glatten Vektorbündeln, für irgendein p. Jetzt wählen wir noch eine Riemannsche Metrik auf N. Dann haben wir eine Exponentialabbildung $V \to N$, wobei V eine offene Umgebung von $N \subset TN$ ist. (Hier wird N mit dem Bild des Nullschnittes $N \to TN$ identifiziert.) Wir können das V so klein wählen, dass für jedes $x \in N$ die Einschränkung von exp auf $V \cap T_xN$ ein Diffeomorphismus von $V \cap T_xN$ mit einer offenen Teilmenge von N ist (Satz von der impliziten Funktion usw.). Dann ist also $\exp : V \to N$ eine Submersion. Jetzt haben wir so etwas wie die Zusammensetzung

$$M \times \mathbb{R}^p \cong E \oplus f^*TN \xrightarrow{\text{proj}} f^*TN \xrightarrow{(x,v)\mapsto(f(x),v)} TN \supset V \xrightarrow{\exp} N$$

In einer genügend kleinen offenen Umgebung U von $M \times \{0\}$ ist diese Zusammensetzung tatsächlich definiert. Sie ist ausserdem Zusammensetzung von zwei Submersionen und damit selbst eine Submersion. Also ist sie transversal zu $L \subset N$, nach Beispiel weiter oben.

Für Schritt II nehmen wir an, dass das $v \in \mathbb{R}^p$ nahe bei 0 gewählt worden ist, regulärer Wert von $\pi : W \to \mathbb{R}^p$, wobei $W = F^{-1}(L) \subset U$. Ausserdem ist $M \times \{v\} \subset U$. Sei jetzt $(x,v) \in M \times \{v\}$ mit $F(x,v) \in L$. Weil F transversal zu L ist, wissen wir

$$dF_{(x,v)}(T_{(x,v)}U) + T_{F(x,v)}L = T_{F(x,v)}N$$

wobei $dF_{(x,v)}$ das Differential von F an der Stelle $(x,v) \in U \subset M \times \mathbb{R}^p$ bezeichnet. Hier können wir schreiben $T_{(x,v)}U = T_xM \times \mathbb{R}^p$. Wir sollen zeigen, dass schon

$$dF_{(x,v)}(T_xM \times 0) + T_{F(x,v)}L = T_{F(x,v)}N .$$

Dazu genügt es, einen linearen Unterraum A von $T_xM \times \mathbb{R}^p = T_{(x,v)}U$ zu finden, der zu $T_xM \times 0$ komplementär ist und der durch $dF_{(x,v)}$ nach $T_{F(x,v)}L \subset T_{F(x,v)}N$ abgebildet wird. Wir wählen A als linearen Unterraum von $T_{(x,v)}W \subset T_{(x,v)}U$. Um genauer zu sein, weil v regulärer Wert von π ist, wissen wir, dass die Projektion von $T_{(x,v)}W \subset T_{(x,v)}U$ nach $\mathbb{R}^p$ surjektiv ist. Wir wählen A als das Bild einer linearen Spaltung $\mathbb{R}^p \to T_{(x,v)}W$ dieser surjektiven Projektion. Dann ist klar, dass A unter $dF_{(x,v)}$ nach $T_{F(x,v)}L$ abgebildet wird, weil ganz W unter F nach L abgebildet wird. $\square$

Bemerkung. Sei X kompakt Hausdorff. Wir haben (vor langer Zeit ...) gezeigt, dass für jedes m-dimensionale Vektorbündel $F \to X$ mit kompaktem X eine stetige Abbildung g von X in eine Grassmannsche $\mathrm{Gr}(m,q)$ existiert (für ein $q \gg 0$) und ein Vektorbündelisomorphismus $F \to g^*E^{m,q}$, wobei $E^{m,q} \to \mathrm{Gr}(m,q)$ das tautologische Vektorbündel ist. Damit ist auch gezeigt, dass $F \to X$ ein Inverses bezüglich der Whitney-Summe besitzt, denn wir können $g^*E^{q,m}$ nehmen, wobei $E^{q,m} \to \mathrm{Gr}(q,m) \cong \mathrm{Gr}(m,q)$ als Inverses von $E^{m,q}$ dient. Etwas anders muss man wohl verfahren, wenn X eine glatte kompakte Mannigfaltigkeit ist und $F \to X$ ein glattes Vektorbündel, für das wir ein glattes Inverses suchen. Wir können wie vorher (unter Verwendung von *glatten* Zerlegungen der Eins) einen glatten Vektorbündelmonomorphismus von F in ein triviales Vektorbündel $X \times \mathbb{R}^s$ konstruieren. Dann können wir das (fasernweise) orthogonale Komplement von F im trivialen Bündel $X \times \mathbb{R}^s$ bilden.

Bemerkung. Von der C^1-Topologie auf $C^\infty(M,N)$ ist Folgendes benutzt worden. Sei $G : Q \times M \to N$ eine glatte Abbildung, wobei Q, M und N glatte Mannigfaltigkeiten sind. *Dann ist die dazu adjungierte Abbildung $Q \to C^1(M,N)$ stetig.*