Dritte Vorlesungswoche

Übersicht zu Differentialtopologie WS 2012/13 (Weiss)

In den ersten zwei Wochen wurden behandelt: Vektorbündel allgemein, speziell Tangentialbündel von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Dieser Stoff ist gut in Bröcker-Jänich nachzulesen (Kapitel 2, Kapitel 3).
Dazu habe ich noch über einige Seiten aus dem Buch von Atiyah "K-Theory" vorgetragen. Es sind die ersten drei Seiten aus §1.4. Das Hauptresultat ist folgendes. Sei X ein kompakter Hausdorff-Raum und Y irgendein Raum, $E \to Y$ ein Vektorbündel über Y. Gegeben stetige Abbildungen

$$f, g \colon X \to Y \ .$$

Wenn f homotop zu g ist, dann sind die Vektorbündel f^*E und g^*E über X isomorph, als Vektorbündel über X. (Eigentlich genügt es, anzunehmen, dass X parakompakt ist. Das ist aber schwieriger zu beweisen.)

Dieses Resultat deutet auf Homotopietheorie hin. In den darauf folgenden Vorlesungsstunden sollte das verschärft werden. Dazu wurde erst bewiesen: Sei X kompakt Hausdorff und $p \colon E \to X$ ein m-dimensionales Vektorbündel über X. *Dann existieren $N \gg 0$ und ein Vektorbündelmonomorphismus*

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, dotted, "g"] \arrow[dr, "p"'] & & X \times \mathbb{R}^N \arrow[dl, "\text{proj}"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

d.h., eine injektive Vektorbündelabbildung in ein triviales Vektorbündel.
Der Beweis ist nicht schwierig: man wählt eine offene Überdeckung von X mit endlich vielen offenen Mengen U_i derart, dass $E|U_i$ trivial ist für alle i. Dann benutzt man eine Partition der Eins für diese offene Überdeckung, um das g aus den Trivialisierungen zusammenzubauen.
Etwas schwieriger (aber nicht unmöglich) ist der relative Fall: wir nehmen an, dass eine abgeschlossene Teilmenge A von X und ein Vektorbündelmonomorphismus

$$\begin{tikzcd}
E|A \arrow[rr, dotted, "g"] \arrow[dr, "p"'] & & A \times \mathbb{R}^N \arrow[dl, "\text{proj}"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

vorgegeben sind. Dann wollen wir einen Vektorbündelmonomorphismus

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, dotted, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & X \times \mathbb{R}^{N'} \arrow[dl, "\mathrm{proj}"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

finden, der mit dem Vorgegebenen auf A übereinstimmt (wobei $N' \gg N$ und wobei wir uns $\mathbb{R}^N$ als linearen Unterraum von $\mathbb{R}^{N'}$ denken).
Ein Spezialfall vom relativen Fall, den ich nicht genügend betont habe: gegeben sei ein Vektorbündel $p\colon E \to Y$ der Faserdimension m und *zwei* Vektorbündelmonomorphismen

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, dotted, "g_0"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \times \mathbb{R}^{N} \arrow[dl, "\mathrm{proj}"] \\ & Y & \end{tikzcd} \quad , \qquad \begin{tikzcd} E \arrow[rr, dotted, "g_1"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \times \mathbb{R}^{N} \arrow[dl, "\mathrm{proj}"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Dann existiert ein Vektorbündelmonomorphismus vom Vektorbündel

$$E \times [0,1] \to Y \times [0,1]$$

in ein triviales Vektorbündel $Y \times [0,1] \times \mathbb{R}^{N'}$*, der über* $Y \times \{0\}$ *mit* g_0 *übereinstimmt und über* $Y \times \{1\}$ *mit* g_1. Dabei ist wie üblich $N' \gg N$. (Zum Beweis: Setze $X = Y \times [0,1]$ und $A = Y \times \{0,1\}$ und wende den obigen relativen Fall an.)

Um das noch homotopietheoretischer auszudrücken, haben wir die Grassmann-Mannigfaltigkeiten herangezogen. Sei

$$\mathrm{Gr}(m,n) = \{A \in \mathrm{Mat}((m+n) \times (m+n)) \mid A^2 = A = A^T,\ \mathrm{rang}(A) = m\ \}.$$

Das ist grob gesprochen die Menge der m-dimensionalen linearen Unterräume von $\mathbb{R}^{m+n}$, wobei wir aber hier jedem dieser linearen Unterräume eine Matrix mit Format $(m+n) \times (m+n)$ entsprechen lassen, nämlich die Matrix A der orthogonalen Projektion auf diesen linearen Unterraum. (Natürlich ist dann der Rang von A gleich m, und natürlich ist $A^2 = A$, also A idempotent; die Gleichung $A = A^T$ bedeutet, dass der Kern von A senkrecht zum Bild von A ist. In der umgekehrten Richtung können wir den linearen Unterraum aus der Matrix bestimmen, indem wir $\mathrm{im}(A)$ bilden.) Die Grassmann-Mannigfaltigkeit $\mathrm{Gr}(m,n)$ ist übrigens wirklich eine glatte Unter*mannigfaltigkeit* von $\mathrm{Mat}((m+n) \times (m+n))$, aber darauf legen wir hier keinen besonderen Wert. Wir haben jedenfalls das tautologische Vektorbündel

$$E^{m,n} \longrightarrow \mathrm{Gr}(m,n)$$

mit Totalraum $E^{m,n} = \{(A,v) \in \mathrm{Gr}(m,n) \times \mathbb{R}^{m+n} \mid v \in \mathrm{im}(A)\}$ und Projektion $(A,v) \mapsto A$. Ausserdem bemerken wir, dass es inklusions-artige Abbildungen

$$\mathrm{Gr}(m,n) \longrightarrow \mathrm{Gr}(m,n+1)$$

gibt und dass die Einschränkung von $E^{m,n+1}$ auf $\mathrm{Gr}(m,n)$ mit $E^{m,n}$ identifiziert werden kann.
Man sollte sich jetzt folgendes (langsam, sorgfältig usw.) klarmachen. Für einen Raum X mit Vektorbündel $p\colon V \to X$ der Faserdimension m sind die folgenden Daten gleichwertig:

- Ein Vektorbündelmonomorphismus

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, dotted, "g"] \arrow[dr, "p"'] & & X \times \mathbb{R}^N \arrow[dl, "\mathrm{proj}"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

- Eine stetige Abbildung $u\colon X \to \mathrm{Gr}(m, N-m)$ und ein Vektorbündelisomorphismus

$$V \xrightarrow{\cong} u^*E^{m,N-m} \ .$$

Deswegen ist das oben Gezeigte (über Existenz von Vektorbündelmonomorphismen in triviale Vektorbündel) gleichwertig zu:

- Für X kompakt Hausdorff und Vektorbündel $p\colon V \to X$ der Faserdimension m existieren $N \gg 0$ und $u\colon X \to \mathrm{Gr}(m, N-m)$ derart, dass $u^*E^{m,N-m} \cong V$;
- Falls für X kompakt Hausdorff und Vektorbündel $p\colon V \to X$ der Faserdim m zwei Abbildungen $u_0, u_1\colon X \to \mathrm{Gr}(m, N-m)$ gefunden worden sind derart, dass $u_0^*E^{m,N-m} \cong V$ und $u_1^*E^{m,N-m} \cong V$, dann folgt, dass die Zusammensetzungen

$$X \xrightarrow{u_0} \mathrm{Gr}(m, N-m) \xrightarrow{\mathrm{inkl}} \mathrm{Gr}(m, N'-m)$$

$$X \xrightarrow{u_1} \mathrm{Gr}(m, N-m) \xrightarrow{\mathrm{inkl}} \mathrm{Gr}(m, N'-m)$$

  homotop sind für genügend grosses N'.

Um nun diese Resultate zu einem einzigen zu verarbeiten, benötigen wir so etwas wie einen Raum

$$\mathrm{Gr}(m,\infty) := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathrm{Gr}(m,n)$$

wobei wir m festhalten und die sogenannten Inklusionen von $\mathrm{Gr}(m,n)$ in $\mathrm{Gr}(m,n+1)$ benutzen, um die Vereinigung zu bilden. Jetzt ist die Frage, wie wir die Topologie auf $\mathrm{Gr}(m,\infty)$ zu wählen haben. Es gibt zwei gute Antworten.

- Jedes $\mathrm{Gr}(m,n)$ ist schon ein metrischer Raum, weil in
$$\mathrm{Mat}((m+n)\times(m+n)) \cong \mathbb{R}^{(m+n)^2}$$
enthalten. Die sogenannten Inklusionen $\mathrm{Gr}(m,n) \to \mathrm{Gr}(m,n+1)$ respektieren die Metriken. Damit ist $\mathrm{Gr}(m,\infty)$ auch ein metrischer Raum. Wir wählen dann also die Topologie, die von der Metrik bestimmt wird.
- Wir wählen die Topologie so, dass eine Teilmenge S von $\mathrm{Gr}(m,\infty)$ genau dann abgeschlossen ist, wenn $S \cap \mathrm{Gr}(m,n)$ abgeschlossen ist in $\mathrm{Gr}(m,n)$ für alle n. (Man nennt das die *direkte-Limes-Topologie.*)

Leider stimmen diese beiden Topologien nicht überein. Für uns ist die zweite etwas bequemer, weil sie die folgende Eigenschaft hat: *Jede kompakte Teilmenge von* $\mathrm{Gr}(m,\infty)$ *ist schon in* $\mathrm{Gr}(m,n)$ *enthalten für ein gewisses* $m<\infty$. (Übungsaufgabe.) Ich glaube allerdings, dass die Identität, aufgefasst als stetige Abbildung von $\mathrm{Gr}(m,\infty)$ mit der direkten-Limes-Topologie nach $\mathrm{Gr}(m,\infty)$ mit der metrischen Topologie, eine Homotopieäquivalenz ist. (Ähnliche Aussagen werden in einem hübschen alten Artikel von J Milnor bewiesen, *On spaces having the homotopy type of a CW-complex.*)
Jetzt gibt es noch etwas mehr zu tun: Wir müssen zeigen, dass die Vektorbündel $E^{m,n} \to \mathrm{Gr}(m,n)$ sich zu einem einzigen Vektorbündel
$$E^{m,\infty} \to \mathrm{Gr}(m,\infty)$$
zusammenfügen lassen. (Wir wissen natürlich schon, dass $E^{m,n+1}$ eingeschränkt auf $\mathrm{Gr}(m,n)$ mit $E^{m,n}$ identifiziert ist, und das soll auch so bleiben.) Ich lasse das als ernste Übungsaufgabe!!! Nächstes Übungsblatt.
Unter Benutzung der bequemen Eigenschaft von $\mathrm{Gr}(m,\infty)$ mit der direkten-Limes-Topologie können wir jetzt die Resultate oben wie folgt zusammenfassen. *Sei* X *ein kompakter Hausdorff-Raum und sei* $\mathrm{Vect}_m(X)$ *die Menge der Isomorphieklassen von* m*-dimensionalen Vektorbündeln über* X. *Die Abbildung*
$$[X,\mathrm{Gr}(m,\infty)] \longrightarrow \mathrm{Vect}_m(X)\ ,$$
die einer Homotopieklasse $[f]$ *die Klasse des Vektorbündels* $f^*E^{m,\infty}$ *zuordnet, ist eine Bijektion.*