10.11.2012

Übungsblatt 4 zu Differentialtopologie WS 2012/13 (Weiss)

1. Gegeben glatte Abbildungen $g\colon L \to M$ and $f\colon M \to N$, wobei L, M, N orientiert, glatt, kompakt und zusammenhängend sind, ohne Rand. Man zeige, dass für die Abbildungsgrade gilt $\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g)$.

2. Der Grad der antipodischen Abbildung von S^n nach S^n ist $(-1)^{n+1}$.

3. Sei $f\colon M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen orientierten, zusammenhängenden, glatten kompakten Mannigftgkten ohne Rand. Zeigen: Wenn der Abbildungsgrad von f gleich ± 1 ist, dann ist der durch f induzierte Homomorphismus von Fundamentalgruppen $\pi_1(M) \to \pi_1(N)$ surjektiv.

4. (a) Zeigen, dass die Euler-Charakteristik $\chi(M)$ einer kompakten glatten Mannigfaltigkeit M ungerader Dimension, ohne Rand, gleich Null ist. [*Zur Erinnerung: wir hatten $\chi(M)$ für beliebige kompakte glatte Mgftgkten ohne Rand definiert als die "Anzahl" der Elemente in $s^{-1}(\zeta(M))$, wobei $\zeta : M \to TM$ der Nullschnitt ist und $s : M \to TM$ ein anderer glatter Schnitt, der transversal zu $\zeta(M)$ ist. Dabei müssen die Elemente von $s^{-1}(\zeta)$ mit Vorzeichen ± 1 gezählt werden; das Vorzeichen kann man gerade aufgrund der Transversalitätsbedingung definieren.*]
(b) Sei jetzt M eine kompakte glatte Mannigfaltigkeit M ungerader Dimension mit Rand. Zeigen, dass

$$\chi(\partial M) = 2\chi(M) \ .$$

[*Zur Erinnerung: wir hatten $\chi(M)$ für beliebige kompakte glatte Mgftgkten mit Rand definiert als die "Anzahl" der Elemente in $s^{-1}(\zeta(M))$, wobei wie üblich $\zeta : M \to TM$ der Nullschnitt ist und $s : M \to TM$ ein anderer glatter Schnitt, der transversal zu $\zeta(M)$ ist und ausserdem für jeden Randpunkt $x \in \partial M$ einen Vektor $s \in T_xM$ auswählt, der nicht zu $T_x(\partial M)$ gehört und im übrigen "nach aussen" weist.*]

5. (a) Zeigen, dass die Euler-Charakteristik von S^2 gleich 2 ist. Allgemeiner: die Euler-Charakteristik von S^{2n} ist 2.
(b) Wenn $M \to N$ eine endliche Ueberlagerung von kompakten glatten Mannigfaltigkeiten ist, mit k Blättern, dann ist $\chi(M) = k\chi(N)$. Wir können dabei $\partial N \neq \emptyset$ erlauben. Daraus folgern, dass die Euler-Charakteristik von $\mathbb{R}P^{2n}$ gleich 1 ist. Daraus folgern, dass $\mathbb{R}P^{2n}$ nicht Rand einer kompakten glatten Mannigfaltigkeit der Dimension $2n+1$ sein kann.

6. Gegeben glatte Mannigfaltigkeiten L, M, N, wobei L und M kompakt. Wir sagen, dass zwei glatte Abbildungen $f\colon L \to N$ und $g\colon M \to N$ *zueinander* transversal sind, wenn für jedes $x \in L$ und $y \in M$ mit $f(x) = g(y)$ gilt

$$df_x(T_x L) + df_y(T_y M) = T_{f(x)} \ .$$

Das heisst, jeder Tangentialvektor bei $f(x) = g(y)$ lässt sich schreiben als $v + w$, wobei v im Bild von $df_x\colon T_x L \to T_{f(x)} N$ ist und w im Bild von $dg_y\colon T_y M \to T_{g(y)} N$ ist.
Für den Fall, dass f und g nicht zueinander transversal sind, soll gezeigt werden: Beliebig nahe bei f existiert ein glattes $f_1\colon L \to N$ derart, dass f_1 und g zueinander transversal sind. [Dabei präzisieren, was "beliebig nahe" heissen soll.]

Zur schriftlichen Bearbeitung, vorzugsweise bis Mittwoch 21.11: Aufg 1,3,4.