29.10.2012

Übungsblatt 3 zu Differentialtopologie WS 2012/13 (Weiss)

1. Von der Aufgabe 2 auf Übungsblatt 2 war noch übriggeblieben: Zeigen, dass $TG_{p,q} \cong \mathrm{Hom}(E, E^{\perp})$, wobei $G_{p,q}$ die Grassmann-Mannnigfaltigkeit ist und $E, E^{\perp}$ die beiden tautologischen Vektorbündel auf dieser. (Die Bezeichnung ist inzwischen geändert worden; $G_{p,q}$ heisst auch $\mathrm{Gr}(p,q)$ und E heisst auch $E^{p,q}$.)

2. Aus der Vorlesung war folgendes übriggeblieben (siehe Übersicht der dritten Vorlesungswoche): Zeigen, dass die tautologischen Vektorbündel

$$E^{m,n} \to \mathrm{Gr}(m,n)$$

(siehe Bemerkungen zu Bezeichnungen in voriger Aufgabe) sich zu einem einzigen Vektorbündel

$$E^{m,\infty} \to \mathrm{Gr}(m,\infty)$$

zusammenfügen lassen. (Wir wissen schon, dass $E^{m,n+1}$ eingeschränkt auf $\mathrm{Gr}(m,n)$ mit $E^{m,n}$ identifiziert ist.) Dabei ist

$$\mathrm{Gr}(m,\infty) := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathrm{Gr}(m,n)$$

mit der direkten-Limes-Topologie. Die direkte-Limes-Topologie kann man übrigens so charakterisieren: Eine Abbildung von $\mathrm{Gr}(m,\infty)$, mit dieser Topologie, in einen topologischen Raum X ist stetig genau dann, wenn ihre Einschränkung auf $\mathrm{Gr}(m,n)$ stetig ist für jedes n.

3. Gegeben glatte Mannigfaltigkeiten M und N und ein $r \in \mathbb{N}$. Der Jetraum $J^r(M,N)$ ist eine glatte Mannigfaltigkeit mit einer vergesslichen Abbildung nach M und einer anderen vergesslichen Abbildung nach N. Die Elemente von $J^r(M,N)$ sind Äquivalenzklassen von Paaren (f,x), wobei $x \in M$ und f eine glatte Abbildung von einer Umgebung von x nach N ist. Zwei solche Paare (f,x) und (g,y) sind *äquivalent*, falls $x = y$ und $f(x) = g(x)$ und die Abbildungen f, g dieselben r-ten Taylorpolynome haben bei x, in Karten um x und um $f(x) = g(x)$. (Das Kriterium ist unabhängig von der Wahl der Karten.)

(i) Erklären Sie, wie $J^r(M,N)$ eine glatte Manigfaltigkeit ist. (Atlas.)
(ii) Erklären Sie, wie jede r mal stetig differenzierbare Abbildung f von M nach N eine stetige Abbildung $j^r f : M \to J^r(M,N)$ induziert (die $x \in M$ so etwas wie das r-te Taylorpolynom von f bei x zuordnen soll). Man nennt $j^r f$ die r-Jet-Verlängerung von f.

Sei jetzt $C^r(M,N)$ die Menge der r mal stetig differenzierbaren Abbildungen von M nach N. Die kompakt-offene C^r-Topologie auf $C^r(M,N)$ kann so definiert werden: Für jede kompakte Menge $K \subset M$ und offene Teilmenge U von $J^r(M,N)$ bilden wir die Menge $X_{K,U} \subset C^r(M,N)$ bestehend aus den f, für die $j^r f(K) \subset U$. Diese Mengen $X_{K,U}$ sollen eine Subbasis der Topologie bilden (also müssen endliche Durchschnitte erlaubt werden, dann beliebige Vereinigungen von solchen endlichen Durchschnitten). Diese Beschreibung erklärt sehr gut, warum die Topologie so heisst, wie sie heisst.

Die kompakt-offene C^∞ Topologie auf $C^\infty(M,N)$ kann so definiert werden: Für jede kompakte Menge $K \subset M$ und $r > 0$ und offene Teilmenge U von $J^r(M,N)$ bilden wir die Menge $X_{K,r,U} \subset C^r(M,N)$ bestehend aus den f, für die $j^r f(K) \subset U$. Diese Mengen $X_{K,U}$ sollen eine Subbasis der Topologie bilden.

(iii) Zeigen Sie (oder widerlegen Sie), dass diese Topologien auf $C^r(M,N)$ bzw $C^\infty(M,N)$ vollständig metrisierbar sind. Das soll heissen, dass sie durch eine vollständige Metrik induziert werden können. (Das ist uns besonders wichtig in den Fällen, wo M nicht kompakt ist.) Hinweis: es gibt Umformulierungen der Definitionen, die die Diskussion vereinfachen.

Man kann auch von der C^r-Topologie auf $C^s(M,N)$ sprechen, wenn $s > r$. (Erklären.)

4. Gegeben glatte Mannigfaltigkeiten M und N, und eine glatte Untermannigfaltigkeit L von N. Ich hatte in Aussicht gestellt, dass die Menge der glatten Abbildungen von M nach N, die zu L transversal sind, offen und dicht ist in $C^\infty(M,N)$ mit der C^1-Topologie. Bewiesen wurde aber nur: sie ist dicht. Ist sie nun wirklich im Allgemeinen offen oder nicht? Wenn nicht, gibt es eine abgeschwächte Form dieser Behauptung, die sich beweisen laesst?

Zur schriftlichen Bearbeitung, vorzugsweise bis Mittwoch 7.11: Aufg 1 und 2. Es kommen vielleicht noch andere Aufgaben dazu, eher nicht zur schriftlichen Bearbeitung.