18.10.2012

Übungsblatt 2 zu Differentialtopologie WS 2012/13 (Weiss)

1. Sei $L \to \mathbb{R}P^{n-1}$ das bekannte tautologische Vektorbuendel mit Faserdimension 1. Sei qL die Whitneysumme $L \oplus L \oplus \cdots \oplus L$ von q Exemplaren von L, ein Vektorbuendel der Faserdimension q ueber $\mathbb{R}P^{n-1}$. In dieser Aufgabe wird nach moeglichst kleinem, aber positiven $q \in \mathbb{N}$ gesucht mit der Eigenschaft, dass qL ein triviales Vektorbuendel ueber $\mathbb{R}P^{n-1}$ ist.

(i) Angenommen, es existiert eine bilineare Abbildung $A\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ mit der Eigenschaft, dass fuer jedes von Null verschiedene $v \in \mathbb{R}^n$ die lineare Abbildung $A(v,-)\colon \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ invertierbar ist. Man zeige, dass dann qL ein triviales Vektorbuendel ueber $\mathbb{R}P^{n-1}$ ist.

(ii) Daraus schliesse man: $2L$ is trivial ueber $\mathbb{R}P^1$, $4L$ ist trivial ueber $\mathbb{R}P^3$ und $8L$ ist trivial ueber $\mathbb{R}P^7$.

(iii) Fuer allgemeines n werden die besten Resultate wie folgt erzielt: Man waehlt $\mathbb{R}^q$ mit der Struktur eines Moduls ueber einer endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Algebra K, die $\mathbb{R}^n$ als linearen Unterraum enthaelt, und zwar so, dass alle von Null reschiedenen Elemente von $\mathbb{R}^n$ Einheiten in K sind. Machen Sie sich kundig, was solche Algebren K angeht.

(iv) Aehnliches gilt im komplexen Fall; dann geht es um das tautologische komplexe Vektorbuendel mit Faserdimension 1 ueber $\mathbb{C}P^{n-1}$.

2. Die Grassmann-Mannighfaltigkeit $G_{p,q}$ der p-dimensionalen linearen Unterraeume in $\mathbb{R}^{p+q}$ kann wie folgt beschrieben werden als Teilmenge des Vektorraumes $\mathrm{End}(\mathbb{R}^{p+q})$ der reellen $(p+q)\times(p+q)$-Matrizen:

$$G_{p,q} = \{M \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^{p+q}) \mid \mathrm{rang}(M) = p\,, M^2 = M = M^T\}.$$

Daraus kann man einigermassen ersehen, dass $G_{p,q}$ abgeschlossen und beschraenkt ist. Die tautologischen Vektorbuendel ueber $G_{p,q}$ sind definiert als $E \to G_{p,q}$ und $E^\perp \to G_{p,q}$, wobei

$$\begin{array}{rcl} E & = & \{(M,v) \in G_{p,q} \times \mathbb{R}^{p+q} \mid M(v) = v\}, \\ E^\perp & = & \{(M,v) \in G_{p,q} \times \mathbb{R}^{p+q} \mid M(v) = 0\} \end{array}$$

mit den vergesslichen Abbildungen $(M,v) \mapsto M$ als Vektorbuendelprojektionen. Dann ist $E \oplus E^\perp$ ein triviales Vektorbuendel.

Aus der Beschreibung von $G_{p,q}$ kann man nicht ohne weiteres sehen, dass es sich um eine differenzierbare Mannigfaltigkeit (und sogar eine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{End}(\mathbb{R}^{p+q})$) handelt. Man gebe einen differenzierbaren Atlas fuer $G_{p,q}$ an, der Abhilfe schafft, oder Untermannigfaltigkeits-Karten. Ausserdem soll im Zusammenhang damit ein Vektorbuendelisomorphismus

$$TG_{p,q} \cong \mathrm{Hom}(E, E^\perp)$$

angegeben werden.

3. Wie Aufgabe 2, nur mit den Stiefel-Mannigfaltigkeiten anstelle der Grassmannmannigfaltikeiten. Die Stiefel-Mannigfaltigkeit der p-Rahmen in $\mathbb{R}^{p+q}$ kann definiert werden als der Raum der linearen Abbildungen $f\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^{p+q}$, die das Standard-Skalarprodukt erhalten (also $\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle$ fuer alle $v, w \in \mathbb{R}^p$).

Zur schriftlichen Bearbeitung, vorzugsweise bis Mittwoch 24.10: Aufgaben 1 und 2.