10.10.2012

Übungsblatt 1 zu Differentialtopologie WS 2012/13 (Weiss)

1. Stellen Sie einen Vektorbuendelatlas im Sinne von Steenrod fuer das Tangentenbuendel von S^2 her; also Ueberdeckung von S^2 mit offenen Mengen U_α und dazu Buendelkartenwechsel $U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ (stetige Abbildungen).

2. Wie Aufgabe 1, aber diesmal fuer das tautologische komplexe Geradenbuendel ueber $\mathbb{C}P^3$. In diesem Fall wird also eine Ueberdeckung von $\mathbb{C}P^3$ mit offenen Mengen U_α gesucht und Buendelkartenwechsel

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(1, \mathbb{C}).$$

(Hier wird $\mathbb{C}P^3$ als die Menge aller 1-dimensional komplex-linearen Unterraeume L von $\mathbb{C}^4$ aufgefasst. Das tautologische komplexe Geradenbuendel ueber $\mathbb{C}P^3$ hat den Totalraum

$$E := \{(L, v) \mid L \in \mathbb{C}P^3,\ v \in L\}$$

und die Projektion nach $\mathbb{C}P^3$ ist gegeben durch $(L, v) \mapsto L$.)

3. Sei $\pi : E \to X$ ein Vektorbuendel ueber einem Raum X mit Buendelatlas, bestehend aus einer offenen Ueberdeckung (U_α) von X und Trivialisierungen von $E|U_\alpha$, mit Buendelkartenwechseln $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ fuer festes n. Man zeige, dass $g_{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$ (ggf Reihenfolge der Multiplikation abaendern). Man zeige, dass das Vektorbuendel genau dann trivial ist, wenn stetige Abbildungen $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ existieren derart, dass $g_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \cdot \varphi_\beta^{-1}$. (Ggf. Reihenfolge der Multiplikation abaendern.)

4. (*Diese Aufgabe ist etwas gemein.*) Man zeige, dass jedes relle Vektorbuendel ueber S^3 trivial ist (das heisst, isomorph zu einem Produkt $S^3 \times \mathbb{R}^k$ fuer geeignetes k). Ebenso fuer komplexe Vektorbuendel ueber S^3.

5. (*Aus Broecker-Jaenich.*) (a) Man gebe auf S^2 ein Vektorfeld (= Schnitt des Tangentialbuendels) an, das genau zwei Nullstellen hat. (b) Man gebe auf S^2 ein Vektorfeld an, das genau eine Nullstelle hat.