Differentialtopologie WS 2012/13

Lektüre für den Kurs:

- *Einführung in die Differentialtopologie* von T. Bröcker and Klaus Jänich, Springer-Verlag
- oder die englische Version, *Introduction to differential topology*, Cambridge University Press
- Meine altes Skript *Immersion theory for homotopy theorists*, siehe Link weiter oben in der Hierarchie.

Voraussetzungen. Das ist mir noch sehr unklar. Ich glaube, dass ich Begriffe wie differenzierbare Mannigfaltigkeit, diff'bare Abbildung zwischen diff'baren Mannigfaltigkeiten und Tangentenraum vorraussetzen kann. Wie steht es mit Tangentenbündel und Vektorraumbündeln allgemein? Wir müssen das aushandeln. Wie steht es mit dem Begriff Transversalität? Ich werde das wahrscheinlich ausfuehrlich behandeln (müssen). Der Transversalitätssatz hat viele Varianten, die fast alle mit einer einzigen Methode bewiesen werden können; es ist wichtig, dass man das versteht.

Themen. Nach den Grundbegriffen, einschliesslich Transversalität, sollten wir uns ein paar Anwendungen von Transversalität anschauen. Dazu kann ausser dem üblichen wie Schnittzahlen und Abbildungsgraden auch gehören: Existenz von Morsefunktionen, Diskussion von Bordismengruppen wie in Bröcker-Jänich.
Danach würde ich mich gerne auf Immersionstheorie konzentrieren. Unter einer *Immersion* einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M in eine differenzierbare Mannigfaltigkeit N versteht man eine differenzierbare Abbildung $f\colon M \to N$, die an jedem Punkt $x \in M$ in geeigneten Karten um $x \in M$ und $f(x) \in N$ aussieht wie die Standardinklusion von $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$. (Es wird aber nicht vorausgesetzt, dass f injektiv ist.) Wenn zwei Immersionen $f, g\colon M \to N$ gegeben sind, kann man etwa fragen, ob es möglich ist, Immersionen F_t für $t \in [0,1]$ zu finden derart, dass $F_0 = f$, $F_1 = g$ und die F_t mitsamt ihren Ableitungen stetig von t abhängen. Ein berühmtes Beispiel: Sei M die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^3$ und $N = \mathbb{R}^3$; weiter soll f die uebliche Inklusion sein und g die Abbildung $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$. Dann gibt es so eine Famile $(F_t)_{t\in[0,1]}$, die f in g überführt oder deformiert. Das ist kaum zu glauben, aber weil wir in einer fortschrittlichen Zeit leben, gibt es schon (seit langem) einen Film darüber: *Outside In* auf YouTube.
Bei der Behandlung der Immersionstheorie (übrigens auch bei gewissen Anwendungen von Transversalität) wird etwas Homotopietheorie (also Anfänge der algebraischen Toplogie) benötigt. Ich möchte aber in diesem Bereich nicht viel voraussetzen; es soll mitgeliefert werden.